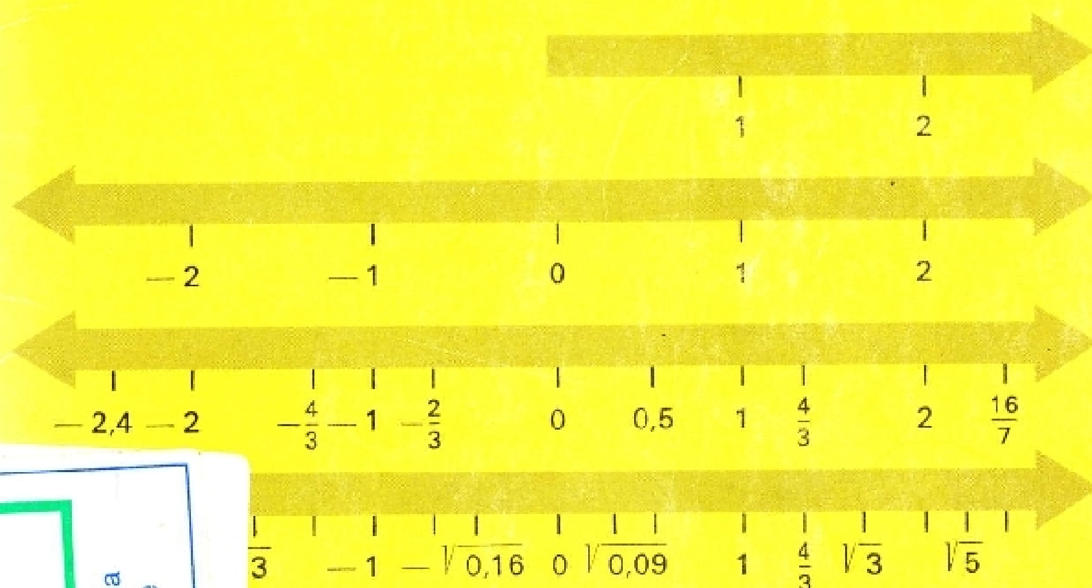
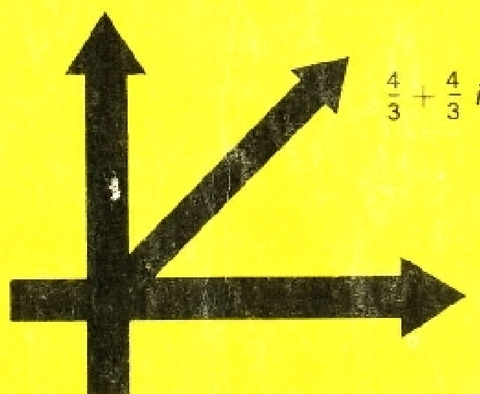
PARLANDO DI MATEMATICA

I NUMERI COMPLESSI

R. SPRECKELMEYER





PROGRESSO TECNICO EDITORIALE - MILANO

PARLANDO DI MATEMATICA

Volumetti agili, di rapida ma rigorosa informazione, veicoli di aggiornamento sulle più moderne ricerche matematiche.

L. 900.-

R. Spreckelmeyer e K. Mustain: I numeri naturali

R. Spreckelmeyer: I numeri interi

J. Yarnelle e R. Spreckelmeyer: I numeri razionali

R. Spreckelmeyer: I numeri reali

R. Spreckelmeyer: I numeri complessi

J. Yarnelle: Introduzione alla matematica del transfinito

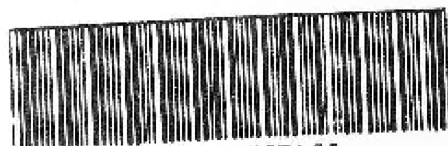
J. D. Bristol: Grafici di relazioni e funzioni

J. D. Bristol: Il concetto di funzione

J. D. Bristol: Introduzione alla programmazione lineare

J. Yarnelle: Strutture matematiche finite

W. Prenowitz e H. Swain: Movimento e congruenza in geometria



Traduzione italiana dall'originale inglese di

CLAUDIO BIRATTARI

Progresso Tecnico Editoriale - Via Pisacane, 14

Milano

Titolo inglese

The Complex Numbers

PARLANDO DI MATEMATICA

I numeri complessi

di Richard Spreckelmeyer





PROGRESSO TECNICO EDITORIALE
MILANO

PREFAZIONE

Tutta la matematica può essere costruita basandosi sui sistemi numerici. Ogni lettore, che fin dall'infanzia ha preso familiarità con i numeri, ha imparato a scuola ad addizionarli e a moltiplicarli applicando determinate regole di cui probabilmente non si è mai chiesto quali fossero i fondamenti. Crescendo in età, sono entrate a far parte del bagaglio di conoscenze matematiche del nostro lettore anche le frazioni e le regole che le riguardano. Da ultimo egli ha studiato i numeri negativi e forse anche i numeri irrazionali e immaginari. La complessità delle regole addizionali necessarie per poter trattare questi ulteriori sistemi numerici, probabilmente avrà spinto il lettore a porsi la domanda: « *Qual è la causa* che rende necessarie queste regole? ». La storia della matematica è piena di questi interrogativi. I famosissimi studiosi greci della geometria, per esempio, classificarono i rapporti in commensurabili (frazionari o razionali) e incommensurabili (irrazionali), e ciò perché non conoscevano i numeri irrazionali.

Questa serie di monografie è stata scritta per introdurre gli studenti e gli adulti interessati allo studio dei vari sistemi numerici, adottando un'esposizione non rigorosamente formale onde stabilire una base per lo studio della maggior parte delle « moderne matematiche ». Sebbene nella presente trattazione sia dimostrata la maggior parte dei teoremi, è tuttavia nostro intendimento tenere il livello del rigore matematico ad un punto al quale un lettore non sofisticato può arrivare senza eccessivo dispendio di energie, apprezzando i propositi e la ' potenza ' dei teoremi, senza essere costretto ad affinare troppo la tecnica di dimostrazione.

I numeri complessi è la quinta monografia della serie **Par-**

lando di matematica. Le proprietà fondamentali del sistema dei numeri complessi sono trattate prendendo lo spunto dalle proprietà dei numeri reali, partendo dai quali essi sono stati costruiti. Per quanto si faccia continuamente appello all'intuizione, facendo uso di frecce o di punti, per ricavare le proprietà dei numeri complessi, la logica dello sviluppo della trattazione è indipendente da queste rappresentazioni.

La dimostrazione che un numero complesso ha due radici quadrate, come risulta nel paragrafo 1 del capitolo III, raramente è trattata negli altri testi. Invece, il risultato più generale, che l'equazione $\mathbf{z}^n = \mathbf{a}$ ha n soluzioni (se $\mathbf{z} \neq 0$), o che 0 ha una radice n-upla (se $\mathbf{z} = 0$), è basato sul teorema fondamentale dell'algebra. Il teorema fondamentale tuttavia si basa su concetti dell'Analisi, che vanno al di là di ogni trattazione strettamente algebrica; la trattazione di un caso meno generale è perciò interessante già di per se stessa.

Il capitolo finale dà i cenni di un approccio 'vettoriale' alla geometria euclidea. Inoltre, si dimostra il teorema di De Moivre servendosi del principio di induzione matematica, cioè di quel caratteristico principio che è stato enunciato, senza fornirne la dimostrazione, nel volumetto *I numeri naturali*, prima monografia di questa serie.

Negli scritti di questa collana si è cercato di mantenere un equilibrio fra l'appello alla plausibilità e la dimostrazione di una proprietà, in modo da aiutare gli studenti nel riassumere gli elementi dei corsi scolastici riguardanti i sistemi numerici. La nostra speranza è che queste monografie siano un utile supplemento per tutti coloro che si applicano allo studio della matematica.

Winchester, Massachusetts RICHARD SPRECKELMEYER

INDICE

Quando Gauss aveva diciannove anni, sua madre chiese al suo compagno di studi Wolfgang Bolyai se Gauss sarebbe giunto a compiere qualcosa di notevole. Quando Bolyai le rispose « Diventerà il più grande matematico europeo! », lei scoppiò in lacrime.

E. T. BELL

Esiste una famosa formula — forse la più compatta e più nota fra tutte le formule — ricavata da Eulero in seguito a una scoperta di De Moivre: $e^{\pi i} + 1 = 0$. *Essa interessa allo stesso modo il mistico, lo scienziato, il filosofo e il matematico. Per ciascuno di essi possiede un suo proprio e diverso significato. Sebbene fosse nota da quasi un secolo, la formula di De Moivre apparve a Benjamin Pierce* (1809-1880) *come una rivelazione miracolosa. Avendola egli scoperta un certo giorno, così si rivolse ai suoi studenti: « Signori, è certamente vera, ma è del tutto paradossale; noi non siamo in grado di comprenderla, e non possiamo sapere che cosa significhi, ma è stata dimostrata e perciò sappiamo che essa deve considerarsi la verità ».*

E. KASNER e J. NEWMAN

I numeri complessi

I. L'insieme dei numeri complessi

1. Introduzione

È stato un grave incidente: due automobili provenienti da direzioni formanti un angolo retto si sono scontrate ad un incrocio. Sono stati chiamati i vigili urbani, esperti nel determinare la velocità di ciascuna automobile al momento dell'urto, per decidere di chi era la colpa. La fine della traccia lasciata dalle ruote bloccate per la frenata indicava il punto di collisione; l'angolo di moto dopo l'urto si individuava facilmente. Questa informazione, assieme ai valori dei pesi delle automobili, era sufficiente ai vigili per produrre una testimonianza qualificata nel giudizio in tribunale. Pertanto, fu possibile determinare approssimativamente la velocità di ciascuna automobile, e il giudice potè attribuire le responsabilità e condannare il colpevole al risarcimento dei danni.

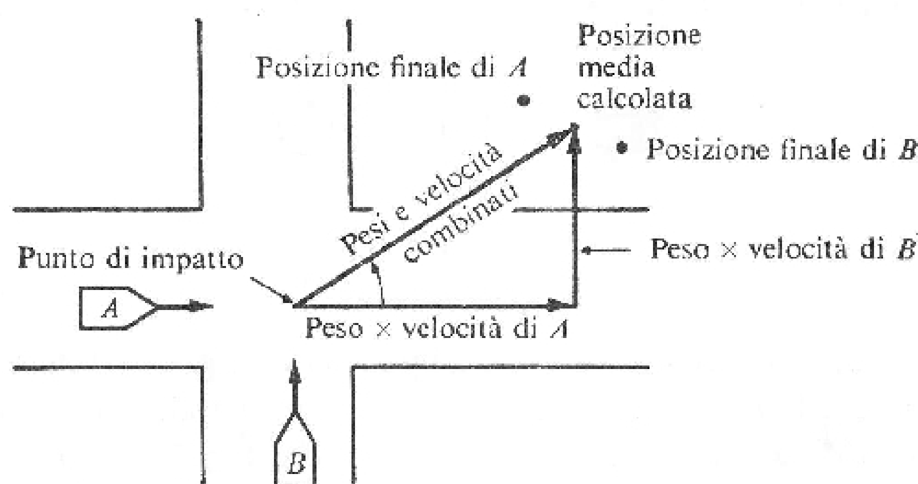


DIAGRAMMA DELL'INCIDENTE

FIG. 1–0

I vigili, per determinare le velocità delle automobili, si servirono dei metodi di analisi delle forze coinvolte; il modello usato era quello di *vettori di forza* in un piano (si veda la Fig. 1–0). Questo stesso modello ci aiuterà ora per iniziare l'esposizione delle proprietà del sistema dei numeri complessi.

Per analizzare un fenomeno complicato è spesso utile prestare l'attenzione solamente ad alcuni elementi per volta. Frequentemente, lo studio di diverse situazioni semplificate permette la comprensione completa del fenomeno in esame. Questa osservazione farà da sfondo alla trattazione che segue.

2. Alcuni moti semplici

Cominciamo con l'osservare una collisione molto semplice; un'asta sottile che colpisce una biglia con la sua estremità, come nel giuoco del biliardo. Il moto di una superficie su di un'altra è soggetto ad una resistenza chiamata *attrito*. Se la palla da biliardo è colpita delicatamente, l'attrito provocherà entro breve tempo il suo arresto. Pertanto, un colpo di una determinata forza può determinare il moto di una palla di biliardo, come è rappresentato nella Fig. 1–1.



FIG. 1–1

Un secondo colpo, dato ad angolo retto rispetto al primo, dopo che la palla si è fermata, può produrre un ulteriore moto come risulta dalla Fig. 1–2. La freccia, nella Fig. 1–2, non mostra forse il cammino che avrebbe seguito la palla se un solo colpo avesse prodotto lo stesso effetto dei due colpi combinati, dati ad angolo retto?

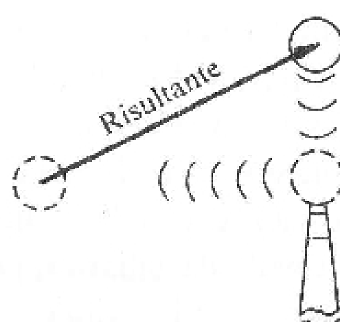


FIG. 1–2

Relativamente alla posizione finale raggiunta dalla palla, è naturale chiamare il cammino rappresentato dalla freccia la *risultante* degli altri due colpi (forze). La risultante può essere espressa in funzione dei primi due colpi? Logicamente tutte queste domande sono poste pensando di avere una risposta positiva. Vediamo di trovare un metodo per trasformare queste osservazioni in espressioni numeriche.

L'uso di frecce di lunghezza variabile per rappresentare *numeri con segno* (o *orientati*, potremmo dire), è probabilmente un'idea familiare al lettore. In particolare, egli conoscerà senz'altro diagrammi come quello riportato in Fig. 1–3 (che fornisce una rappresentazione dell'addizione di numeri orientati, $^{+}2 + {}^{+}3 = {}^{+}5$).

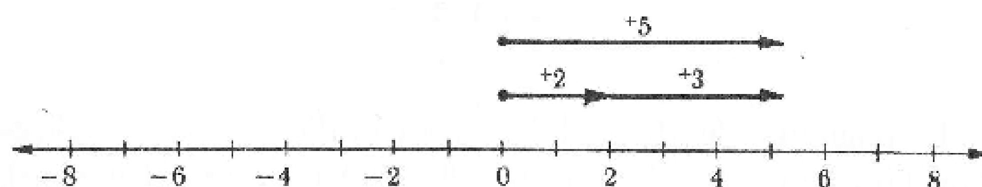


FIG. 1–3

Avremmo potuto tracciare la retta numerica della Fig. 1–3 in posizione verticale; probabilmente il lettore ha familiarità anche con l'uso di due rette numeriche, che si intersecano ad

angolo retto in corrispondenza dei loro punti zero, in modo da formare gli assi di un riferimento. Su tale riferimento, coppie ordinate di numeri con segno (consideriamo per ora solo numeri reali), vengono impiegate per determinare le posizioni dei diversi punti. Possiamo servirci di tale grafico relativamente alla nostra discussione sulla palla da biliardo, ponendo l'origine nel punto dove il moto inizia per la prima volta. Poiché la forza con la quale la palla è colpita è indicata dalla distanza percorsa dalla palla, un numero (reale) con segno può essere impiegato vantaggiosamente per indicare un determinato moto della palla. Allora, se a rappresenta il primo colpo, e se b rappresenta il secondo, è naturale, come risulta in Fig. 1–4, rappresentare la risultante per mezzo della coppia ordinata $\langle a, b\rangle$, che identifica il punto finale della traiettoria. Qui, $a = 6$ e $b = 3$.

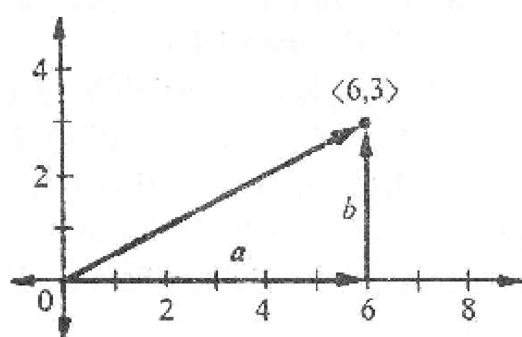


FIG. 1–4

La risultante dei due colpi, sferrati in direzione perpendicolare l'un l'altro (ogni colpo parallelo ad un asse del grafico), è un modello per un *numero complesso.*

Definizione 1.1: *Un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali* $\langle a, b\rangle$. *L'insieme di tutte le coppie ordinate di numeri reali è l'insieme* **C** *dei numeri complessi. Talora ci si riferisce a* **C** *come al dominio complesso.*

Supponiamo di collocare una palla da biliardo nell'origine. Facciamo in modo che tale palla sia colpita due volte, prima parallelamente all'asse orizzontale, poi parallelamente a quello verticale. Esiste più di una combinazione di un colpo orizzontale seguito da un colpo verticale che può condurre la palla in una data posizione finale, partendo ogni coppia di tiri dall'origine? Se il lettore è d'accordo nel fatto che la risposta è « no », allora egli giustificherà anche la seguente definizione.

Definizione 1.2: *Due numeri complessi* $\langle a, b \rangle$ *e* $\langle c, d \rangle$ *sono uguali se e solo se risulta* $a = c$ *e* $b = d$.

Da un punto di vista tecnico, è ora necessario mostrare che questa definizione possiede effettivamente le proprietà della relazione di uguaglianza. Queste proprietà (già enunciate nel volumetto *I numeri interi*[1]) sono le seguenti:

Proprietà riflessiva: Per ogni x, $x = x$;

Proprietà simmetrica: Per ogni x e y, se $x = y$ allora $y = x$;

Proprietà transitiva: Per ogni x, y, e z, se $x = y$ e $y = z$, allora $x = z$.

È facile dimostrare queste proprietà, basate sulle proprietà dei numeri reali. Per dimostrare la proprietà riflessiva, si noti che $a = a$ e $b = b$ dalla proprietà riflessiva dei numeri reali; e questo è esattamente quanto richiede la definizione 1.2 perché un numero complesso $\langle a, b \rangle$ sia uguale a se stesso.

Allo stesso modo, ognuna delle altre proprietà sopra elencate dell'uguaglianza fra numeri complessi, viene dimostrata servendosi della corrispondente proprietà dell'uguaglianza fra numeri reali. Proponiamo come esercizio al lettore di sviluppare particolareggiatamente queste dimostrazioni.

---

[1] Si veda *I numeri interi* di Richard Spreckelmeyer, una delle monografie di questa stessa collana.

È importante notare che la definizione di un numero complesso non esclude che uno o entrambi i numeri reali della coppia ordinata siano il numero reale «zero». Infatti le coppie $\langle\sqrt{2}, 0\rangle$, $\langle 0, -3\rangle$ e $\langle 0, 0\rangle$ sono numeri complessi. Tutti questi esempi illustrano le seguenti definizioni.

Definizione 1.3: *Un numero complesso della forma* $\langle a, 0\rangle$ *è chiamato numero reale nel dominio complesso. Il numero reale* a *è detto parte reale del numero complesso* $\langle a, b\rangle$.

Definizione 1.4: *Un numero complesso della forma* $\langle 0, b\rangle$ *è chiamato numero immaginario puro nel dominio complesso. Il numero reale* b *è detto parte immaginaria del numero complesso* $\langle a, b\rangle$.

Pertanto, $\sqrt{2}$ è la parte reale dei numeri complessi $\langle\sqrt{2}, 0\rangle$ e $\langle\sqrt{2}, 5\rangle$, mentre -3 è la parte immaginaria dei numeri $\langle 0, -3\rangle$ e $\langle -8, -3\rangle$.

La ragione di questa particolare scelta dei nomi verrà discussa in un prossimo capitolo. Per il momento, localizziamo i numeri immaginari puri e i numeri reali nel grafico relativo all'insieme dei numeri complessi, come in Fig. 1–5.

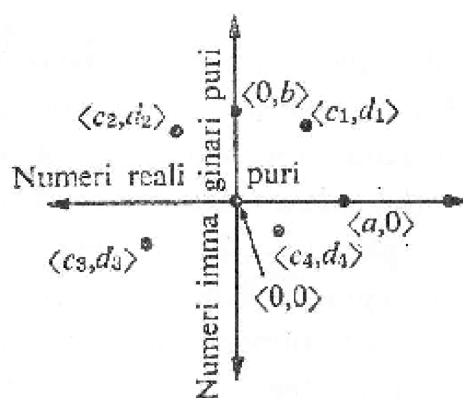


FIG. 1–5

Dalla figura risulta chiaro che l'asse orizzontale rappresenta i numeri reali nel dominio complesso, mentre l'asse verticale

rappresenta i numeri immaginari puri. Il lettore noterà allora che il numero complesso $\langle 0, 0\rangle$ è sia un numero reale sia un immaginario puro nel dominio dei numeri complessi. (Perché?).

I numeri complessi nei quali la parte immaginaria non è lo zero (0) sono chiamati semplicemente numeri immaginari, ad esempio $\langle c_1, d_1\rangle$, $\langle c_2, d_2\rangle$, ecc. nella Fig. 1–5. I punti che li rappresentano sono situati fuori dall'asse orizzontale; tali numeri includono tutti i numeri immaginari puri come sottoinsieme, fatta eccezione per $\langle 0, 0\rangle$.

Nel prossimo capitolo discuteremo l'addizione e la moltiplicazione fra numeri complessi; quindi giustificheremo la scelta dei nomi « parte reale » e « parte immaginaria » per a e b nel numero complesso $\langle a, b\rangle$.

È qui necessario un ulteriore commento. Il lettore avrà notato che abbiamo identificato i numeri complessi con coppie ordinate di numeri reali, e che di conseguenza l'insieme dei punti su un diagramma non è altro che un modello visivo da noi usato per rappresentare C. Cioè, ogni numero complesso può essere rappresentato da un punto su un diagramma, e viceversa. Altre volte non abbiamo usato dei punti, ma delle frecce per rappresentare un numero complesso. Continueremo anche in seguito ad usare queste rappresentazioni distinte per i numeri complessi. Quando sarà più utile usare le frecce, useremo le frecce; quando sarà più vantaggioso usare i punti, useremo i punti. C'è esattamente un punto che rappresenta un dato numero complesso con questo modello, mentre per un dato numero complesso esiste un insieme infinito di frecce, ognuna delle quali può rappresentare il numero complesso.

In particolare, se il numero complesso $\langle 2, 3\rangle$ deve essere rappresentato da una freccia, la freccia può estendersi *da* ogni punto qualunque *a* un altro punto, che sia posto due unità a destra e tre unità al di sopra *del punto di partenza*. (Si veda la Fig. 1–6).

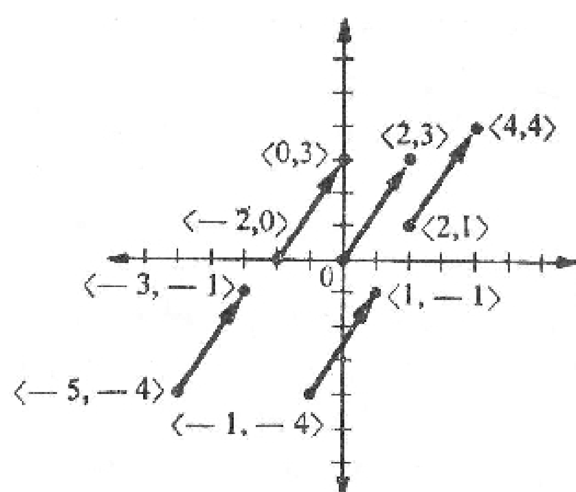


FIG. I–6

In generale, per rappresentare un numero complesso $\langle a, b\rangle$ con una freccia, si sceglie un punto $\langle x, y\rangle$ per la coda della freccia, e allora il punto $\langle x + a,\ y + b\rangle$ coincide con la punta della freccia. In un certo senso, allora, quando si usa la rappresentazione per mezzo delle frecce, qualsiasi punto può essere assunto come « l'origine trasformata » di una rappresentazione. Questo concetto di « vettore libero » sarà utile nel prossimo capitolo. Si ricordi comunque, che il numero complesso stesso è una coppia ordinata di numeri reali, e la rappresentazione che noi usiamo ci serve solamente come ausilio per pensare i numeri complessi. In altre parole, la rappresentazione *non* è il numero complesso.

II. Operazioni sul dominio complesso

1. Addizione di numeri complessi

Lo studio del moto di piccole particelle costituisce una parte della scienza fisica. In particolare, è possibile vedere, anche ad occhio nudo, delle piccole particelle poste in un fluido, muoversi di moto irregolare, detto moto browniano, causato da collisioni molecolari con particelle visibili. Questo moto è stato così chiamato dopo che il botanico scozzese Robert Brown ne stabilì l'esistenza nel 1827.

Studiamo per il momento una forma semplificata del moto browniano. Supponiamo che il fluido nel quale sono contenute le particelle piccole, ma pur sempre visibili, sia « costretto » tra due lastre piane di vetro, così da poter considerare i moti come piani. Di conseguenza due movimenti successivi di una particella soggetta a tale fenomeno possono essere paragonati al movimento di una palla di biliardo, costituito da due moti successivi combinati, ognuno comprendente un urto orizzontale seguito da un urto verticale. La Fig. 2–1 illustra il percorso che una particella può compiere se i numeri complessi $\langle 3, 2\rangle$ e $\langle 1, 4\rangle$ rappresentano forze molecolari che agiscono sulla particella.

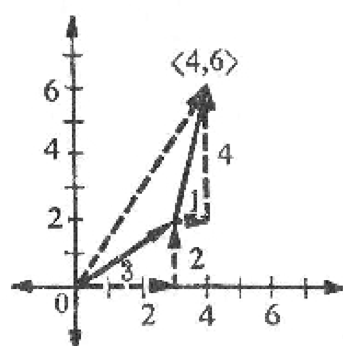


FIG. 2–1

È facile capire che la posizione della particella dopo che queste due forze hanno agito su di essa può essere rappresentata dal numero complesso $\langle 4, 6 \rangle$. Ragionando in questi termini, $\langle 3, 2 \rangle$ più $\langle 1, 4 \rangle$ è uguale a $\langle 4, 6 \rangle$. Si osservi anche che $3 + 1 = 4$ e che $2 + 4 = 6$. Questo suggerisce la seguente definizione.

Definizione 2.1: *L'addizione di numeri complessi* (simbolo: $\oplus$) *è un'operazione binaria, per la quale* $\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + c, b + d \rangle$.

Possiamo esprimere la definizione di addizione di numeri complessi in un altro modo, stabilendo che per sommare due numeri complessi, si devono sommare [1] le loro parti reali e [2] le loro parti immaginarie. Esempi di addizione di numeri complessi sono illustrati in Fig. 2–2.

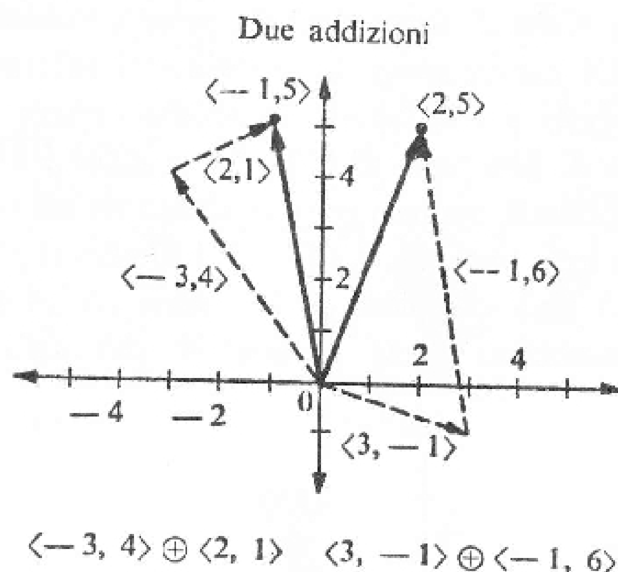


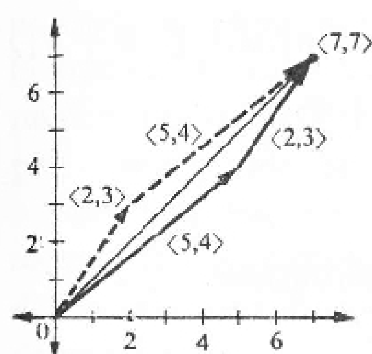
FIG. 2–2

Un semplice ragionamento mostrerà chiaramente che l'addizione di numeri complessi gode delle proprietà di *chiusura*, di *commutatività* e di *associatività* che è ragionevole richiedere

a ogni operazione che chiamiamo addizione. Il numero complesso $\langle 0, 0\rangle$, si comporta evidentemente come un *elemento neutro* o *indifferente rispetto all'addizione*, e poiché $\langle a, b\rangle \oplus \oplus \langle -a, -b\rangle = \langle 0, 0\rangle$ è chiaro che ogni numero complesso ha un *inverso rispetto all'addizione* o *opposto.*

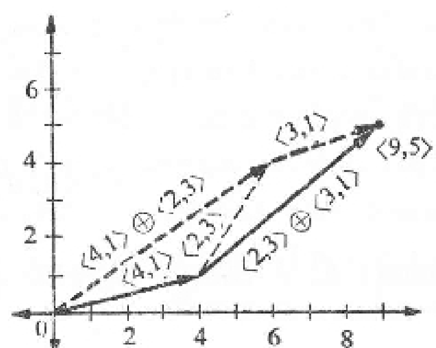
Che l'addizione di numeri complessi sia commutativa è illustrato dalla Fig. 2–3, nella quale le linee tratteggiate rappresentano l'addizione $\langle 2, 3\rangle \oplus \langle 5, 4\rangle$ e le linee a tratto pieno rappresentano l'addizione commutata $\langle 5, 4\rangle \oplus \langle 2, 3\rangle$: si noti appunto che la somma $\langle 7, 7\rangle$ è rappresentata dalla stessa freccia in entrambi i casi. La Fig. 2–4 illustra che $\mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c}$ dove $\mathbf{a} = \langle 4, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3\rangle$, $\mathbf{c} = \langle 3, 1\rangle$ sono tre numeri complessi.

Le dimostrazioni di queste proprietà sono lasciate come esercizio al lettore.



$\langle 2,3\rangle \oplus \langle 5,4\rangle = \langle 5,4\rangle \oplus \langle 2,3\rangle$

FIG. 2–3



$[\langle 4,1\rangle \oplus \langle 2,3\rangle] \oplus \langle 3,1\rangle = \langle 4,1\rangle \oplus [\langle 2,3\rangle \oplus \langle 3,1\rangle]$

FIG. 2–4

2. Sottrazione di numeri complessi

Come per i sistemi numerici discussi in altre monografie di questa serie, la sottrazione è definita in termini di addizione.

Definizione 2.2: *Per i numeri complessi* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \ominus \mathbf{b} = \mathbf{x}$ *se e solo se esiste un numero complesso* $\mathbf{x}$ *per il quale* $\mathbf{x} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{a}$.

Che la sottrazione sia sempre possibile è facilmente dimostrabile. Dati i numeri complessi $\langle a, b\rangle$ e $\langle r, s\rangle$, dobbiamo far vedere che esiste un numero complesso $\langle x, y\rangle$ per il quale $\langle x, y\rangle \oplus \langle a, b\rangle = \langle r, s\rangle$.

Supponiamo che esista un tale numero complesso; lo possiamo aggiungere al primo membro, ottenendo $\langle x + a, y + b\rangle = \langle c, d\rangle$. Dalla definizione di uguaglianza sappiamo che $x + a = c$ e $y + b = d$, o che $x = c - a$ e $y = d - b$. È una proprietà dei numeri reali che $c - a$ e $d - b$ esistano e siano unici.

Rimane da dimostrare che $\langle c - a, d - b\rangle$ soddisfa alla condizione riportata nella definizione di sottrazione. I seguenti passaggi mostrano che ciò avviene e pongono così termine alla dimostrazione del teorema proposto:

$$\begin{aligned}\langle c - a, d - b\rangle \oplus \langle a, b\rangle &= \langle [c - a] + a, [d - b] + b\rangle \\ &= \langle c + [-a + a], d + [-b + b]\rangle \\ &= \langle c + 0, d + 0\rangle \\ &= \langle c, d\rangle.\end{aligned}$$

Teorema: C *è chiuso rispetto alla sottrazione.*

Lasciamo al lettore la dimostrazione della seguente proprietà.

Teorema: *Per i numeri complessi* **a** *e* **b**, $\mathbf{a} \ominus \mathbf{b} = \mathbf{a} \oplus -\mathbf{b}$.

3. Forma normale di un numero complesso

Nella tabella I sono messe a confronto l'addizione di numeri complessi e l'addizione dei numeri reali corrispondenti.

ADDIZIONE DI ALCUNI NUMERI COMPLESSI		ADDIZIONE DEI CORRISPONDENTI NUMERI REALI
(1)	$\langle 3, 0\rangle \oplus \langle 2, 0\rangle = \langle 5, 0\rangle$	$3 + 2 = 5$
(2)	$\langle —8, 0\rangle \oplus \langle 5, 0\rangle = \langle —3, 0\rangle$	$—8 + 5 = —3$
(3)	$\langle 0, 3\rangle \oplus \langle 0, 2\rangle = \langle 0, 5\rangle$	$3 + 2 = 5$
(4)	$\langle 0, —8\rangle \oplus \langle 0, 5\rangle = \langle 0, —3\rangle$	$—8 + 5 = —3$

Le righe 1 e 2 rappresentano le addizioni di numeri reali nel dominio complesso, confrontate con le addizioni delle loro parti reali. Si noti che gli addendi nella colonna a sinistra e quelli nella colonna a destra sono accoppiati in modo che al numero reale a debba corrispondere il numero complesso $\langle a, 0\rangle$. Le somme mantengono la stessa corrispondenza? Si! Mettiamo in evidenza questo fatto dicendo che la corrispondenza $\langle a, 0\rangle \leftrightarrow a$ è una corrispondenza biunivoca, fra un sottoinsieme dei numeri complessi e l'insieme dei numeri reali, che conserva la somma. Le righe tre e quattro rappresentano le addizioni di numeri immaginari puri, confrontate alle addizioni delle loro parti immaginarie. Si noterà che la corrispondenza $\langle 0, b\rangle \leftrightarrow b$ è pure essa una corrispondenza biunivoca che conserva la somma fra un sottoinsieme di numeri complessi e l'insieme dei numeri reali. Il primo di questi fatti suggerisce la seguente definizione.

Definizione 2.3: *Per il numero reale* $\langle a, 0\rangle$ *nel dominio complesso scriveremo semplicemente* a.

La seconda corrispondenza permette una definizione del tutto analoga. Il simbolo **i** è usato per distinguere le applicazioni della definizione 2.4 da quelle della definizione 2.3.

Definizione 2.4: *Per il numero immaginario puro* $\langle 0, b\rangle$ *scriveremo semplicemente «bi» oppure «*$\mathbf{i}b$*».*

ESEMPI

(1) $\langle a, 0\rangle = a, \ \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -5 = \langle -5, 0\rangle$

(2) $\langle 0, b\rangle = \mathbf{i}b$ o $b\mathbf{i}$, $\quad \langle 0, -4\rangle = -4\mathbf{i}, \quad \mathbf{i}\pi = \langle 0, \pi\rangle$

Introduciamo una ulteriore semplificazione con la seguente:

Definizione 2.5: *Per* $\oplus$ *scriveremo semplicemente* $+$ *(e per* $\ominus$ *scriveremo* $-$*) per indicare l'addizione (e la sottrazione) sull'insieme dei numeri complessi.*

Se si applicano tutte le tre definizioni all'addizione

$$\langle 4, 0\rangle \oplus \langle 0, 3\rangle = \langle 4, 3\rangle$$

si ottiene $\quad 4 + 3\mathbf{i} = \langle 4, 3\rangle.$

Questo esempio illustra che ogni numero complesso $\langle a, b\rangle$ può essere espresso nella forma $\langle a, 0\rangle \oplus \langle 0, b\rangle$. Questa rappresentazione suggerisce le seguenti definizioni:

Definizione 2.6: *La forma normale del numero complesso* $\langle a, b\rangle$ *è*

$$a + b\mathbf{i} \quad \text{ossia} \quad \langle a, b\rangle = a + b\mathbf{i}.$$

Definizione 2.7: *La forma canonica del numero complesso* $\langle a, b\rangle$ *è*

$$\langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle.$$

Definizione 2.8: *Il numero complesso* $\langle 0, 1\rangle = 1\mathbf{i}$ *è detto unità immaginaria. Scriveremo semplicemente* $\mathbf{i}$ *al posto di* $1\mathbf{i}$.

ESEMPI

(1) $\langle \sqrt{2}, 0 \rangle = \sqrt{2}$

(2) $\langle 0, \sqrt{5} \rangle = \sqrt{5}\mathbf{i}$

(3) $\langle -3, 7 \rangle = -3 + 7\mathbf{i}$

(4) $\langle 7, -4 \rangle = 7 + (-4)\mathbf{i}$

(5) $\langle 0, -1 \rangle = -\mathbf{i}$

4. Moltiplicazione scalare

In Fig. 2–5, la freccia rappresentante 3 e la freccia rappresentante 2×3 sono state disegnate assieme ad una retta numerica. Chiaramente, la differenza fondamentale fra le frecce è che una è due volte più lunga dell'altra. È naturale pensare che la moltiplicazione di 3 per il numero reale 2 ha allungato la freccia che rappresenta il 3. La moltiplicazione per un numero reale compreso fra 0 e 1 avrebbe *accorciato* la freccia? Qual è l'effetto prodotto dalla moltiplicazione per un numero reale negativo minore di —1? E compreso fra —1 e zero?

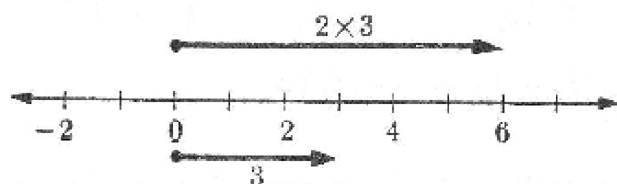


FIG. 2–5

Se estendiamo questa interpretazione alle frecce che rappresentano numeri complessi, troviamo un modello per la moltiplicazione di un numero complesso per un numero reale. Chiamiamo *scalari* i numeri reali per distinguerli dai numeri reali nel dominio complesso. Quindi, stiamo moltiplicando un numero complesso per uno scalare. In Fig. 2–6, la freccia rappresentante il numero complesso $\langle 3, 4 \rangle$ è stata raddoppiata.

Conviene il lettore sul fatto che questo è l'effetto che ci si attende dalla moltiplicazione per lo scalare 2?

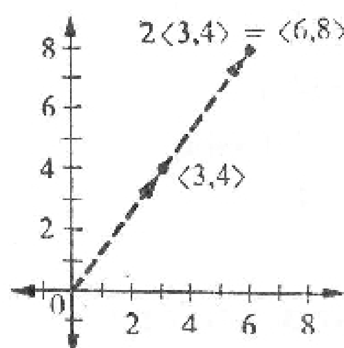


FIG. 2–6

Definizione 2.9: *Se r è uno scalare (numero reale) e $\langle a, b\rangle$ è un numero complesso, allora $r\langle a, b\rangle = \langle ra, rb\rangle$ e $r\langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle r$.*

ESEMPI

(1) $3\langle 4, -7\rangle = \langle 12, -21\rangle$

(2) $\frac{2}{3}\langle -6, 15\rangle = \langle -4, 10\rangle$

(3) $-3\langle 5, -2\rangle = \langle -15, 6\rangle$

(4) $1\langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle$

(5) $0\langle a, b\rangle = \langle 0, 0\rangle$

Il lettore potrebbe rappresentare ciascun numero complesso e il suo prodotto con un dato scalare negli esempi da 1 a 3, per controllare che l'interpretazione geometrica suggerita prima è mantenuta. Si noti, nell'esempio 3, dove lo scalare è negativo, che la freccia rappresentante il prodotto, oltre che essere allungata, è diretta in senso opposto rispetto a quella che rappresenta il suo fattore complesso. L'esempio 4 mostra che lo scalare 1 è una identità moltiplicativa (detta anche elemento neutro o indifferente rispetto alla moltiplicazione) o unità per la moltiplicazione scalare.

5. Moltiplicazione per numeri reali nel dominio complesso

In precedenza, parlando della forma normale di un numero complesso, abbiamo messo in evidenza la corrispondenza, che conserva il valore della somma, tra a e $\langle a, 0\rangle$, cioè tra numeri reali nel campo complesso e numeri reali. Nel paragrafo precedente abbiamo convenuto di chiamare scalari i numeri reali. Sembra ora naturale definire la moltiplicazione di un numero complesso per un numero reale nel campo complesso in modo che restino valide le proprietà della moltiplicazione scalare.

Definizione 2.10: *Per ogni numero complesso* $\langle a, b\rangle$, *e per ogni numero reale* $\langle r, 0\rangle$ *nel campo complesso, si ha che* $\langle r, 0\rangle \otimes \langle a, b\rangle = \langle ra, rb\rangle$ *e* $\langle r, 0\rangle \otimes \langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle \otimes \otimes \langle r, 0\rangle$.

6. Moltiplicazione per l'unità immaginaria

L'addizione di numeri complessi è stata interpretata graficamente per mezzo di frecce di appropriata lunghezza e direzione. Continuando a seguire questo modello, il numero complesso $\langle 3, 3\rangle$, la cui forma normale è $3 + 3\mathbf{i}$ e la cui forma canonica è $\langle 3, 0\rangle + \langle 0, 3\rangle$, può essere rappresentato ponendo l'estremità di una freccia verticale di tre unità di lunghezza (rivolta verso l'alto), in coincidenza con la punta di un'altra freccia, di tre unità di lunghezza, disposta orizzontalmente (diretta verso destra), come risulta dalla Fig. 2–7. La Fig. 2–8 dà una interpretazione alternativa, confrontando una freccia rappresentante il 3 con una rappresentante $3\mathbf{i}$. Frecce rappresentanti i valori —5 e —5**i** sono, nella stessa Fig. 2–8, paragonate fra loro. Pertanto, il simbolo **i** può essere considerato come un *operatore* che provoca un cambiamento nella direzione di una freccia che rappresenta un numero reale. L'esatta

variazione di direzione può essere descritta dicendo che l'operatore **i** ruota una freccia, che rappresenta un numero, di 90^0 in senso *antiorario.*

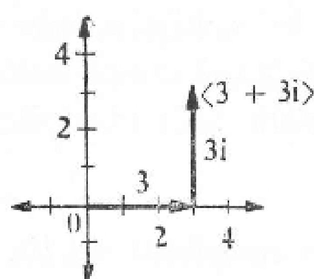


FIG. 2–7

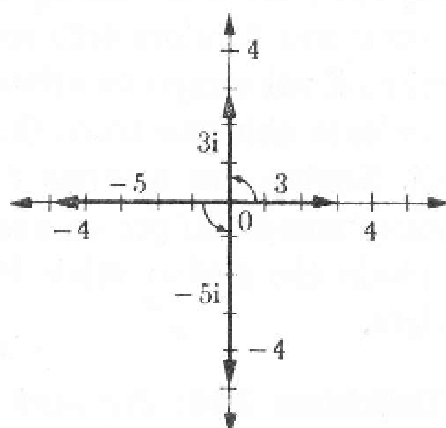


FIG. 2–8

Quale relazione possiamo aspettarci di trovare fra una freccia che rappresenta 3**i** ed una che rappresenta (3i)**i**? È ragionevole pensare che una freccia rappresentante (3**i**)**i** debba essere ruotata di $2 \times 90^0 = 180^0$ in senso antiorario rispetto alla freccia che rappresenta 3? Allora quale altro numero sarà rappresentato dalla freccia che rappresenta (3i)**i**? (Si veda la Fig. 2–9).

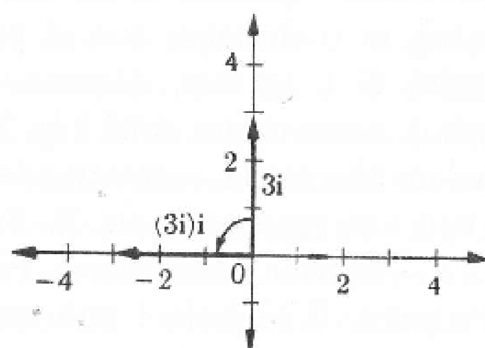


FIG. 2–9

Il lettore conviene che la relazione $(3\mathbf{i})\mathbf{i} = -3$ è un risultato logico? Conviene egli dunque nell'accettare $(3\mathbf{i})\mathbf{i} = 3\mathbf{i}^2$ e $3\mathbf{i}^2 = -3$ come uguaglianze esatte? (Si veda la Fig. 2–9).

Ricordiamo che un esempio di moltiplicazione scalare è $3\langle 0, 1\rangle = \langle 0, 3\rangle$. Se ora noi sostituiamo allo scalare il suo corrispondente numero reale nel campo complesso, esprimiamo la moltiplicazione nel seguente modo: $\langle 3, 0\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle 0, 3\rangle$. Esaminiamo questo fatto da un punto di vista diverso; ed esattamente, quale effetto produce su $\langle 3, 0\rangle$ la moltiplicazione per $\langle 0, 1\rangle$? (Si veda la Fig. 2–10). La considerazione precedente suggerisce nuovamente che la moltiplicazione di un numero complesso per $\langle 0, 1\rangle = \mathbf{i}$ dà come risultato un numero complesso rappresentato da una freccia che risulta ruotata di 90^0 in senso antiorario rispetto a quella del numero complesso originario.

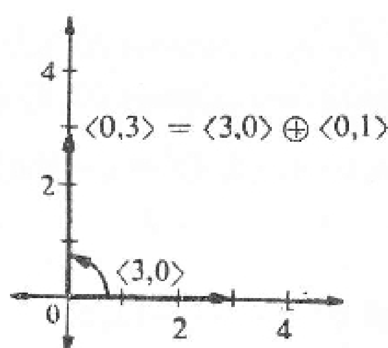


FIG. 2–10

Possiamo quindi convenire che la moltiplicazione di un qualunque numero complesso per l'unità immaginaria ha lo stesso effetto ora mostrato.

ESEMPI Si confronti la Fig. 2–11.

(1) $\langle 3, 5\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle -5, 3\rangle$ (frecce a tratto pieno)

(2) $\langle -2, -6\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle 6, -2\rangle$ (frecce tratteggiate)

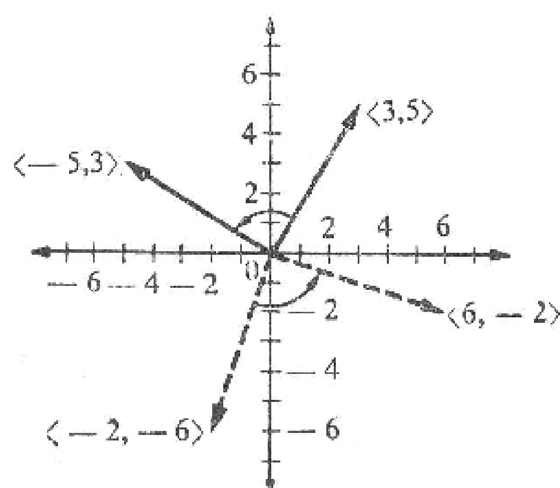


FIG. 2–11

Queste convenzioni e questi esempi ci permettono di dare la seguente definizione.

Definizione 2.11: *Per ogni numero complesso* $\langle a, b\rangle$, *la moltiplicazione per l'unità immaginaria* $\langle 0, 1\rangle$ *è definita da*

$$\langle a, b\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle -b, a\rangle.$$

ESEMPI

(1) $\langle 5, 12\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle -12, 5\rangle$

(2) $\langle -7, 24\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle -24, -7\rangle$

(3) $\langle 3, -4\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle 4, 3\rangle$

(4) $\langle 0, 1\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle -1, 0\rangle$ cioè $\mathbf{i}^2 = -1$

In aggiunta alla proprietà di rotazione, se un numero complesso è moltiplicato per qualsiasi numero immaginario puro, ci si può aspettare, per analogia con la moltiplicazione per scalari, di trovare la lunghezza della freccia o aumentata o diminuita. Si può cioè pensare di trovare un esempio quale

$$\langle 2, 3\rangle \otimes \langle 0, 4\rangle = \langle 4 \times -3, 4 \times 2\rangle = \langle -12, 8\rangle.$$

Si osservi il grafico relativo a questo esempio (Fig. 2–12) per vedere come il prodotto sia rappresentato da una freccia ruotata di 90° e quattro volte più lunga della freccia che rappresenta $\langle 2, 3\rangle$.

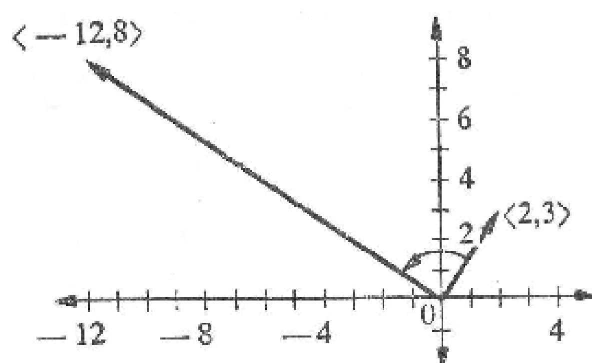


FIG. 2–12

Siamo così portati a dare la seguente definizione.

Definizione 2.12: *Per ogni numero complesso* $\langle a, b\rangle$ *e per ogni immaginario puro* $\langle 0, r\rangle$,

$$\langle a, b\rangle \otimes \langle 0, r\rangle = \langle 0, r\rangle \otimes \langle a, b\rangle = \langle -rb, ra\rangle .$$

ESEMPI

(1) $\langle 0, 3\rangle \otimes \langle 4, 6\rangle = \langle -18, 12\rangle$

(2) $\langle 0, -2\rangle \otimes \langle -3, 4\rangle = \langle 8, 6\rangle$

7. Moltiplicazione su C

Sono stati definiti due casi specifici di moltiplicazione di numeri complessi, e precisamente:

$$\langle a, 0\rangle \otimes \langle c, d\rangle = \langle ac, ad\rangle$$

e $$\langle c, d\rangle \otimes \langle 0, b\rangle = \langle -bd, bc\rangle .$$

Lo studio di altri sistemi numerici ci ha reso familiari i concetti di *chiusura, associatività* e *commutatività* di un'operazione. Ci è anche familiare la proprietà *distributiva* che mette in relazione la moltiplicazione e l'addizione nei sistemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali. Sarebbe dunque logico e utile che anche il sistema dei numeri complessi avesse tutte queste proprietà. Assumiamo per ora che la proprietà distributiva sia verificata, e consideriamo il prodotto $\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle$. Sappiamo che $\langle a, b\rangle = \langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle$. Perciò

$$\begin{aligned}\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle &= [\langle a, 0\rangle + \langle 0, b\rangle] \otimes \langle c, d\rangle \\ &= [\langle a, 0\rangle \otimes \langle c, d\rangle] + [\langle 0, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle] \\ &= \langle ac, ad\rangle + \langle -bd, bc\rangle \\ &= \langle ac - bd, ad + bc\rangle \\ \therefore \langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle &= \langle ac - bd, ad + bc\rangle.\end{aligned}$$

È dunque possibile che questa dimostrazione serva come definizione generale di moltiplicazione di numeri complessi. Ricordiamo tuttavia che stabilire una definizione non significa porre fine ad una indagine; anzi, questo è solo l'inizio. Le proprietà della definizione devono ancora essere provate. (Vedremo discutendo dell'ordine che il ragionamento per analogia non sempre è in grado di fornire definizioni valide).

Definizione 2.13: *Per numeri complessi* $\langle a, b\rangle$ *e* $\langle c, d\rangle$ *qualunque,*

$$\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle = \langle ac - bd, ad + bc\rangle.$$

ESEMPI

(1) $\langle 3, 4\rangle \otimes \langle 2, 5\rangle = \langle 6 - 20, 15 + 8\rangle = \langle -14, 23\rangle$

(2) $\langle 2, 5\rangle \otimes \langle 3, 4\rangle = \langle 6 - 20, 8 + 15\rangle = \langle -14, 23\rangle$

$$(3) \qquad \langle 5, 3\rangle \otimes \langle 5, -3\rangle = \langle 25 - (-9), -15 + 15\rangle$$
$$= \langle 34, 0\rangle$$

$$(4) \qquad \langle 0, 3\rangle \otimes \langle 0, 2\rangle = \langle 0 - 6, 0 + 0\rangle$$
$$= \langle -6, 0\rangle$$

Gli esempi 1 e 2 suggeriscono che la moltiplicazione è commutativa. L'esempio 3 mostra che il prodotto di (almeno) questi due numeri complessi è un numero reale nel campo complesso. L'esempio 4 dimostra che il prodotto di due numeri immaginari *puri* è un numero reale negativo nel campo complesso.

Le dimostrazioni formali dei teoremi relativi alle proprietà di *chiusura*, di *associatività* e di *commutatività* possono essere facilmente scritte nello stesso modo usato per dimostrare le corrispondenti proprietà riportate nel volumetto *I numeri interi,* in questa stessa collana.

Il numero $\langle 1, 0\rangle$ è *l'elemento indifferente rispetto alla moltiplicazione*, dato che $\langle 1, 0\rangle \otimes \langle a, b\rangle = \langle 1 \times a,\ 1 \times b\rangle = \langle a, b\rangle$.

La proprietà distributiva che ci ha aiutato a trovare una definizione generale per la moltiplicazione può essere dimostrata nel modo seguente:

$$\langle a, b\rangle \otimes [\langle c, d\rangle + \langle e, f\rangle] = \langle a, b\rangle \otimes \langle c + e, d + f\rangle$$
$$= \langle a[c + e] - b[d + f], a[d + f] + b[c + e]\rangle$$
$$= \langle ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be\rangle$$

Ora, si ha anche

$$[\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle] + [\langle a, b\rangle \otimes \langle e, f\rangle]$$
$$= \langle ac - bd, ad + bc\rangle + \langle ae - bf, af + be\rangle$$
$$= \langle ac + ae - bd - bf, ad + bc + af + be\rangle.$$

È facile vedere che le ultime espressioni di ciascun sviluppo sono fra loro identiche. Abbiamo quindi dimostrato il seguente teorema.

Teorema: *La moltiplicazione su* **C** *è distributiva rispetto all'addizione su* **C**, *cioè, se* **a**, **b** *e* **c** *sono numeri complessi,*

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac}\,.$$

8. Interpretazione geometrica della moltiplicazione su C

In generale, quale interpretazione grafica è possibile considerare per la moltiplicazione dei numeri complessi? Esistono diversi suggerimenti per le interpretazioni geometriche della moltiplicazione di un numero complesso per un numero reale nel campo complesso o per un numero immaginario puro. Nel primo caso, tutto ciò che si nota è che la freccia che rappresenta il numero complesso è allungata (o accorciata) in funzione della lunghezza del fattore. Un esempio è stato dato in Fig. 2–6 durante la discussione relativa alla moltiplicazione per un numero reale nel campo complesso. Nel secondo caso, non solo esiste il solito allungamento (o accorciamento) della freccia rappresentativa ma si produce anche una rotazione della stessa. Ricorda il lettore di quale rotazione si parla? Come è fatta corrispondere la rotazione al numero immaginario puro usato come fattore? (Si veda la Fig. 2–12).

Continuiamo la nostra indagine con un esempio, servendoci di $\langle 1, 2\rangle$ come numero complesso e di $\langle 3, 4\rangle$ come fattore immaginario:

$$\begin{aligned}\langle 3, 4\rangle \otimes \langle 1, 2\rangle &= \langle 3(1) - 4(2), 3(2) + 4(1)\rangle \\ &= \langle -5, 10\rangle\end{aligned}$$

La Fig. 2–13 rappresenta graficamente l'esempio.

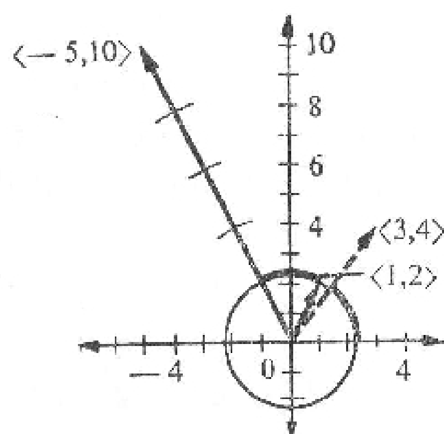


FIG. 2–13

Per rendere più facile al lettore la verifica, la lunghezza della freccia che rappresenta ⟨1, 2⟩ è stata assunta come raggio di una circonferenza con centro nell'origine. Questa stessa lunghezza è stata anche usata come raggio per i quattro archi addizionali « segnati » sulla freccia che rappresenta ⟨—5, 10⟩. Di conseguenza, si può vedere che la freccia rappresentante ⟨—5, 10⟩ è 5 volte più lunga di quella rappresentante ⟨1, 2⟩.

Si noti anche che la freccia rappresentante ⟨3, 4⟩ può essere considerata l'ipotenusa di un triangolo rettangolo. Perciò la sua lunghezza è data dal teorema di Pitagora

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Allo stesso modo, la lunghezza di ⟨1, 2⟩ è

$$\sqrt{(1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

e la lunghezza di ⟨—5, 10⟩ è

$$\begin{aligned} \sqrt{(-5)^2 + (10)^2} &= \sqrt{25 + 100} \\ &= \sqrt{125} \\ &= \sqrt{25 \cdot 5} \\ &= 5\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Si noti inoltre che l'arco di cerchio fra l'asse reale positivo e la freccia per $\langle 3, 4\rangle$ risulta congruente all'arco fra la freccia per $\langle 1, 2\rangle$ e quella per $\langle -5, 10\rangle$.

Pertanto, vediamo che l'interpretazione geometrica della moltiplicazione fra numeri complessi chiama in causa rotazioni di angoli e allungamenti (o accorciamenti) di frecce rappresentanti numeri complessi.
Precisamente, le relazioni sono:[1]

(1) La lunghezza della freccia che rappresenta il prodotto di due numeri complessi è il prodotto delle lunghezze individuali dei due fattori, e

(2) L'angolo della freccia che rappresenta il prodotto di due numeri complessi è la somma degli angoli relativi ai due fattori. (Gli angoli sono misurati in senso antiorario partendo dall'asse reale positivo).

9. Inverso rispetto alla moltiplicazione; divisione

Dato un numero complesso $\langle a, b\rangle$, esiste un numero complesso $\langle x, y\rangle$ tale che

$$\langle a, b\rangle \otimes \langle x, y\rangle = \langle 1, 0\rangle?$$

Per rispondere a questa domanda, possiamo cominciare con l'eseguire la moltiplicazione a primo membro. Si ottiene così

$$\langle ax - by, ay + bx\rangle = \langle 1, 0\rangle$$

La definizione di uguaglianza su **C** porta alle equazioni lineari

(1) $\quad ax - by = 1 \qquad\qquad$ (2) $\quad ay + bx = 0$

[1] In un prossimo capitolo, queste relazioni saranno discusse in modo più formale, e saranno applicate ad una classe di equazioni che non hanno soluzioni nel campo dei numeri reali.

Dalla (2), posto che sia $a \neq 0$, $y = -\frac{bx}{a}$. Sostituendo tale valore nella (1),

$$ax - b\left(-\frac{bx}{a}\right) = 1$$

$$ax + \frac{b^2x}{a} = 1$$

$$\frac{(a^2 + b^2)\,x}{a} = 1$$

(3) $$x = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Dalla (2) e dalla (3) $y = -\frac{b}{a}\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) = \frac{-b}{a^2 + b^2}$

e $$\langle x, y\rangle = \left\langle \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right\rangle.$$

Per verificare questo si trova che

$$\langle a, b\rangle \otimes \left\langle \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right\rangle = \langle 1, 0\rangle$$

come volevasi dimostrare. Si deve fare attenzione che, mentre $a \neq 0$ è una condizione essenziale per la soluzione del sistema lineare, la verifica che è stata fatta non è soggetta a questa restrizione. L'essenziale è che $(a^2 + b^2)$ sia diverso da zero, ossia che a e b non siano contemporaneamente nulli. In altre parole, fra i numeri complessi, solamente $\langle 0, 0\rangle$ non possiede *reciproco* (inverso rispetto alla moltiplicazione). Facciamo ora un esempio nel quale sia $a = 0$ e $b \neq 0$.

ESEMPIO

$$\langle 0, 3\rangle \otimes \left\langle \frac{0}{0^2+3^2}, \frac{-3}{0^2+3^2} \right\rangle =$$

$$= \langle 0, 3\rangle \otimes \langle 0, -\tfrac{1}{3}\rangle$$

$$= \langle (0 \times 0) - (3)(-\tfrac{1}{3}), 0(-\tfrac{1}{3}) + 3(0)\rangle$$

$$= \langle 1, 0\rangle$$

In forma normale $\quad 3\mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{i}}{3}\right) = -\frac{3\mathrm{i}^2}{3} = 1$

Analogamente,

$$\langle 0, 1\rangle \otimes \langle 0, -1\rangle = \langle (0 \times 0) - (1)(-1), 0(-1) + 0(1)\rangle$$
$$= \langle 0 + 1, 0 + 0\rangle$$
$$= \langle 1, 0\rangle$$

Oppure in forma normale $\quad \mathrm{i}(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}^2$
$$= -(-1)$$
$$= 1$$

Poiché $\mathbf{i} + -\mathbf{i} = 0$, possiamo vedere che $-\mathbf{i}$ è *tanto l'opposto di* $\mathbf{i}$ *quanto il suo reciproco.*

Il seguente teorema riassume le conclusioni di questo paragrafo.

Teorema sugli Inversi

L'inverso rispetto alla moltiplicazione (reciproco) di un numero complesso $\langle a, b\rangle$, diverso da zero è

$$\left\langle \frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right\rangle.$$

In forma normale, $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{bi}{a^2 + b^2}$ è il *reciproco* di $a + bi$.

Il risultato del teorema sugli inversi ci permette di definire la divisione.

Definizione 2.14: *Per ogni numero complesso* $\langle a, b\rangle$, *e ogni numero complesso* $\langle c, d\rangle$ *diverso da zero, la divisione, rappresentata da una « linea di frazione », è definita da*

$$\frac{\langle a, b\rangle}{\langle c, d\rangle} = \langle a, b\rangle \otimes \left\langle \frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right\rangle$$

ESEMPIO

$$\frac{\langle 3, 4\rangle}{\langle 8, 6\rangle} = \langle 3, 4\rangle \otimes \left\langle \frac{8}{8^2 + 6^2}, \frac{-6}{100} \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{24 + 24}{100}, \frac{-18 + 32}{100} \right\rangle = \langle 0{,}48, 0{,}14\rangle$$

10. Ordine sul campo dei numeri complessi

Le proposizioni seguenti sono vere per i numeri reali:

$$0 < 1, \qquad 8 < 16, \qquad -7 < -4, \qquad -1 < 0$$

Sembrerebbe dunque ragionevole assumere una definizione che faccia sì che siano vere le corrispondenti proposizioni riguardanti l'ordine dei numeri reali nel campo complesso. Pertanto, a titolo d'esperimento, accettiamo una relazione $\circledless$ ('minore di cerchiato'), per la quale

$$\langle 0, 0\rangle \circledless \langle 1, 0\rangle \qquad \langle 8, 0\rangle \circledless \langle 16, 0\rangle$$

$$\langle -7, 0\rangle \circledless \langle -4, 0\rangle \qquad \langle -1, 0\rangle \circledless \langle 0, 0\rangle .$$

Ma quale delle tre relazioni $\langle 3, 5\rangle \olessthan \langle 5, 3\rangle$, $\langle 3, 5\rangle = \langle 5, 3\rangle$, $\langle 3, 5\rangle \ogreaterthan \langle 5, 3\rangle$, dovremo accettare? (Si veda la Fig. 2–14). Le lunghezze delle frecce rappresentative dei vari numeri sono uguali, come è facilmente verificabile applicando il teorema di Pitagora come già è stato fatto a pagina 25.

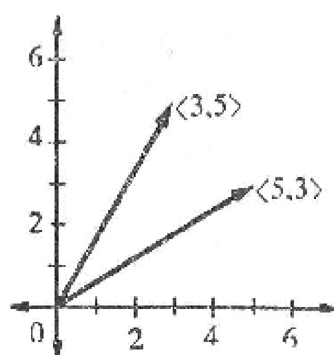


FIG. 2–14

Ora, secondo la definizione di uguaglianza,

$$\langle 3, 5\rangle = \langle 5, 3\rangle$$

significa che $3 = 5$ e che $5 = 3$, ma entrambe sono proposizioni false. Questo fatto mette fuori causa l'uguaglianza. $\langle 5, 3\rangle$ termina più a destra, ma $\langle 3, 5\rangle$ termina più in alto. Si può incominciare a pensare, a questo punto, se effettivamente esiste un modo per definire una relazione d'ordine sull'insieme dei numeri complessi, che mantenga valida la relazione d'ordine sugli scalari per i numeri reali nel campo complesso, suggerita dalla vecchia relazione, la corrispondenza $a \leftrightarrow \langle a, 0\rangle$.

Tale relazione d'ordine, in particolare, dovrebbe significare che $\langle -1, 0\rangle < \langle 0, 0\rangle$ e $\langle 0, 0\rangle < \langle 1, 0\rangle$, in accordo con le affermazioni $-1 < 0$, $0 < +1$, relative ai numeri reali. La relazione d'ordine dovrebbe consentire di classificare tutti i numeri complessi, fatta eccezione per $\langle 0, 0\rangle$ al quale corrisponde lo

zero (0), come « negativi » e « positivi ». Inoltre, dovrebbe conservare, fra le altre, le seguenti proprietà:

(1) La moltiplicazione di entrambi i membri di una disuguaglianza per un numero « positivo » non deve variare il senso della disuguaglianza stessa.

(2) La moltiplicazione per un numero « negativo » inverte il senso della disuguaglianza.

Consideriamo ora il numero complesso $\mathbf{i} = \langle 0, 1 \rangle$. Poiché, evidentemente **i** non è uguale a zero, si avrà: [1] **i** è « positivo », oppure [2] **i** è « negativo ». Supponiamo [1], che **i** sia « positivo », cioè che

$$\mathbf{i} > 0.$$

Allora **i**, come numero « positivo », può essere usato come un fattore che non varia il senso di una disuguaglianza. Cioè,

$$\mathbf{i}(\mathbf{i}) > 0(\mathbf{i})$$

ossia $\mathbf{i}^2 > 0$

Ma $\mathbf{i}^2 = -1$, perciò $-1 > 0$,

che chiaramente è in contraddizione col fatto che intendiamo conservare l'ordine per i numeri reali. Questo fatto dovrebbe provare (per *reductio ad absurdum,* cioè indirettamente) che **i** è un numero « negativo », cioè che

$$\mathbf{i} < 0.$$

Ma allora, poiché **i** è un numero negativo, la moltiplicazione dovrebbe cambiare il senso della disuguaglianza. Da questo fatto si ottiene

$$\mathbf{i} < 0,$$

$$\mathbf{i}(\mathbf{i}) > 0(\mathbf{i})$$

ossia $\mathbf{i}^2 > 0$

e per sostituzione $-1 > 0$.

Anche questo risultato è in contraddizione con la necessità che si conservi l'ordine per i numeri reali. Questo numero, $\mathbf{i} = \langle 0, 1 \rangle$, è chiaramente diverso da zero, e non è tuttavia né « positivo » né « negativo ». Perciò, $\mathbf{i} = \langle 0, 1 \rangle$, è il controesempio che prova la seguente conclusione.

Teorema sull'ordine dei numeri complessi

È impossibile definire una relazione di ordine su **C** *che conservi l'ordine dei numeri reali sul campo complesso, cosa che ci si aspetterebbe a causa della corrispondenza* $a \leftrightarrow \langle a, 0 \rangle$.

Sebbene ci sia stato un vantaggio introducendo i numeri complessi, contemporaneamente lo svantaggio che ne consegue non è da poco. Alcuni dei vantaggi, ottenuti con l'introduzione di questi numeri, verranno discussi nel prossimo capitolo. Come conseguenza del nostro lavoro, abbiamo mostrato che il sistema dei numeri complessi, $(\mathbf{C}, \oplus, \otimes)$, costituisce un campo, proprio come i sistemi $(\mathbf{F}, +, \times)$ e $(\mathbf{R}, +, \times)$ costituiscono dei campi numerici. Tuttavia $(\mathbf{C}, \oplus, \otimes)$ non è un campo *ordinato*, malgrado contenga sottoinsiemi che *sono* campi ordinati. Il sistema di numeri reali in un campo complesso è, naturalmente, un esempio di un tale sottoinsieme.

III. Radici di numeri complessi

1. Radici quadrate di numeri complessi

Nelle altre monografie di questa serie, ciascun sistema numerico è stato introdotto per ovviare a determinate inadeguatezze o difetti dei sistemi numerici discussi in precedenza. Al contrario, noi siamo giunti a questo sistema per tradurre semplici problemi di moto in una forma matematica astratta, allo scopo di dare significato ai numeri complessi che abbiamo costruito prendendo lo spunto dai numeri reali. I numeri reali costituiscono un sistema numerico *completo* nel senso che ogni successione convergente di numeri reali ha come limite un numero reale.[1] Tuttavia, i numeri reali hanno un difetto strutturale. Per esempio, quale numero reale è la radice quadrata di —16?

In particolare, sebbene ogni numero reale non negativo abbia un numero reale come sua radice quadrata, nessun numero reale è la radice quadrata di —4, —9, o —3. In effetti, nessun numero reale negativo ha una radice quadrata nell'insieme dei numeri reali.

Ricordiamo che la radice quadrata di un numero a è un numero x tale che

$$x^2 = a.$$

Il fatto che non esistano delle radici quadrate equivale a dire che esistono equazioni di secondo grado (o quadratiche) che non ammettono come soluzioni numeri reali.

---

[1] Si veda *I numeri reali* di Richard Spreckelmeyer, di questa stessa collana.

L'appellativo di immaginari, dato a certi numeri complessi nel capitolo II, è stato dato ai numeri introdotti da alcuni matematici per servire da soluzione di equazioni quadratiche quali

$$x^2 + 4 = 0$$

che non hanno soluzioni reali. Per molti anni non è stata trovata alcuna interpretazione « pratica » per numeri come **i**, 2**i**, —2**i**, 3 + 4**i**, ecc., ed essi sono stati considerati « incredibili ». Sebbene ora essi siano considerati alla stregua degli altri numeri, tuttavia, per quanto si era un tempo creduto, hanno conservato l'appellativo di « immaginari ».

Il desiderio di risolvere le equazioni, è sempre stato lo spunto per la costruzione dei diversi sistemi numerici. L'insieme dei numeri naturali può essere esteso all'insieme dei numeri interi non negativi, (ossia all'insieme dei numeri naturali incluso lo zero), ricercando la soluzione dell'equazione

$$x + 5 = 5 \qquad \text{o, in generale,} \qquad x + a = a.$$

L'insieme dei numeri naturali non negativi può essere esteso all'insieme dei numeri interi, ricercando l'esistenza di una soluzione per le equazioni del tipo

$$x + 5 = 3 \qquad \text{o, in generale,} \qquad x + a = b$$

sia per $a \leqslant b$ sia per $a > b$.

L'insieme dei numeri interi può essere esteso all'insieme dei numeri razionali, ricercando una soluzione per equazioni del tipo

$$3x = 7 \qquad \text{o, in generale,} \qquad ax = b$$

sia che a sia divisibile per b oppure no.

La costruzione dell'insieme dei numeri reali può essere motivata dall'esigenza di rendere risolubile un'equazione quadratica del tipo

$$x^2 = 5.$$

Si noti ora che il numero complesso 2**i** è soluzione dell'equazione $x^2 = —4$, ossia

$$x^2 + 4 = 0.$$

In particolare,

$$\begin{aligned}(2\mathbf{i})^2 \oplus 4 &= [\langle 0, 2\rangle \otimes \langle 0, 2\rangle] \oplus \langle 4, 0\rangle \\ &= \langle 0 \times 0 - 2 \times 2, 0 \times 2 + 0 \times 2\rangle \oplus \langle 4, 0\rangle \\ &= \langle -4, 0\rangle + \langle 4, 0\rangle \\ &= \langle -4 + 4, 0\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

dimostra, quale applicazione delle proprietà trattate nel capitolo II, che 2**i** è la radice quadrata di —4. Un'altra radice quadrata di —4 è —2**i** come il lettore può facilmente dimostrare.

Allora potrebbe sembrare di aver ovviato alle deficienze dei numeri reali, ma questo non è ancora del tutto vero. O, più precisamente, non abbiamo ancora dimostrato che tutti i numeri complessi hanno radici quadrate appartenenti all'insieme dei numeri complessi. Per esempio, non abbiamo ancora dimostrato che tutte le equazioni quadratiche, del tipo

$$\mathbf{z}^2 + 5 + 12\mathbf{i} = 0$$

i cui coefficienti sono numeri complessi, hanno soluzioni nell'insieme **C**.

Supponiamo che esista un numero complesso $\mathbf{z} = \langle a, b\rangle$, che soddisfi l'equazione precedente. Allora dobbiamo avere

$$\langle a, b\rangle^2 \oplus \langle 5, 12\rangle = \langle 0, 0\rangle$$

ossia $$\langle a^2 - b^2, 2ab\rangle \oplus \langle 5, 12\rangle = \langle 0, 0\rangle$$

ossia $$\langle a^2 - b^2 + 5, 2ab + 12\rangle = \langle 0, 0\rangle.$$

Dalla definizione di uguaglianza

$$a^2 - b^2 + 5 = 0 \qquad \text{e} \qquad 2ab + 12 = 0$$

Dalla seconda equazione risulta $b = -\frac{6}{a}$, posto che sia $a \neq 0$. Sostituendo questo risultato nella prima equazione si ottiene

$$a^2 - \left(-\frac{6}{a}\right)^2 + 5 = 0$$

ossia $$a^2 - \frac{36}{a^2} + 5 = 0$$

ossia $$a^4 + 5a^2 - 36 = 0$$

ossia $$(a^2 + 9)(a^2 - 4) = 0.$$

Richiamandoci alla proprietà dei campi numerici, secondo la quale il prodotto di due numeri è zero se e solo se uno dei due numeri è zero,[1] scriviamo

$$a^2 + 9 = 0 \qquad \text{oppure} \qquad a^2 - 4 = 0.$$

Qui, ci incontriamo ancora nella deficienza dei numeri reali:

$$a^2 + 9 \neq 0 \qquad \text{per } a \in \mathbf{R}.$$

Fortunatamente, esiste una « seconda possibilità » e possiamo vedere che

$$a^2 - 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad a \in \{2, -2\}.$$

---

[1] Si veda *I numeri razionali* di Richard Spreckelmeyer e di John Yarnelle, di questa stessa collana, per una dimostrazione di questa proprietà dei campi.

Se $a = 2$, allora $b = -\frac{6}{2} = -3$; e $\mathbf{z} = \langle 2, -3 \rangle = 2 - 3\mathbf{i}$ *può* essere una soluzione. Fortunatamente, $\mathbf{z} = \langle 2, -3 \rangle$ *è* una soluzione poiché

$$\begin{aligned}\langle 2, -3 \rangle^2 \oplus \langle 5, 12 \rangle &= \langle 2, -3 \rangle \otimes \langle 2, -3 \rangle \oplus \langle 5, 12 \rangle \\ &= \langle 2 \times 2 - (-3)(-3), 2(-3) + \\ &\qquad + 2(-3) \rangle \oplus \langle 5, 12 \rangle \\ &= \langle 4 - 9, -12 \rangle \oplus \langle 5, 12 \rangle \\ &= \langle -5, -12 \rangle \oplus \langle 5, 12 \rangle \\ &= \langle 0, 0 \rangle.\end{aligned}$$

Analogamente, se $a = -2$, possiamo mostrare che $b = 3$ e che $\mathbf{z} = \langle -2, 3 \rangle = -2 + 3\mathbf{i}$ è una soluzione dell'equazione $\mathbf{z}^2 + 5 + 12\mathbf{i} = 0$.

In generale, un procedimento di questo tipo sarà sempre in grado di fornire le radici quadrate di un numero complesso $\mathbf{c}$. In pratica, l'equazione corrispondente a $a^4 + 5a^2 - 36 = 0$ dell'esempio precedente non è facilmente scomponibile in fattori, e per risolverla si deve usare il metodo di « completare » il quadrato.

Dobbiamo ancora dimostrare che ogni numero complesso ha una radice quadrata appartenente all'insieme dei numeri complessi.

In generale, se $\langle a, b \rangle$ è un numero complesso e se assumiamo un numero $\langle x, y \rangle$ come sua radice quadrata, possiamo scrivere

$$\langle x, y \rangle^2 = \langle a, b \rangle$$

o in modo equivalente

$$\langle x^2 - y^2, 2xy \rangle = \langle a, b \rangle \tag{*}$$

ossia $\qquad x^2 - y^2 = a \qquad$ e $\qquad 2xy = b.$

Se $\langle a, b \rangle = \langle 0, 0 \rangle$, allora si può facilmente dimostrare che $\langle x, y \rangle = \langle 0, 0 \rangle$ soddisfa alla relazione $\langle x, y \rangle^2 = \langle a, b \rangle$. Se

$\langle a, b\rangle \neq 0$, allora è vera una delle due relazioni, $x \neq 0$ oppure $y \neq 0$. Supponiamo che sia $x \neq 0$, allora $y = \dfrac{b}{2x}$, e possiamo sostituire questo valore nell'equazione $x^2 - y^2 = a$, ottenendo dapprima

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

quindi $$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

Aggiungendo $a^2 - a^2 = 0$ al primo membro, si ottiene

$$(4x^4 - 4ax^2 + a^2) - (a^2 + b^2) = 0$$

che può essere espresso come differenza di due quadrati. Si ha

$$(2x^2 - a)^2 - (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = 0$$

che può essere espresso come prodotto di due fattori

$$(2x^2 - a + \sqrt{a^2 + b^2})\,(2x^2 - a - \sqrt{a^2 + b^2}) = 0.$$

Applichiamo nuovamente il teorema per il quale se il prodotto di due elementi di un campo numerico è uguale a zero, deve essere uguale a zero uno dei due elementi.

Di conseguenza (1) $$x^2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

oppure (2) $$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

$b\rangle \neq 0$, allora è vera una delle due relazioni, $x \neq 0$ oppure $\neq 0$. Supponiamo che sia $x \neq 0$, allora $y = \frac{b}{2x}$, e possiamo tituire questo valore nell'equazione $x^2 - y^2 = a$, ottenendo oprima

$$x^2 - \frac{b^2}{4x^2} = a$$

indi

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

giungendo $a^2 - a^2 = 0$ al primo membro, si ottiene

$$(4x^4 - 4ax^2 + a^2) - (a^2 + b^2) = 0$$

e può essere espresso come differenza di due quadrati. Si

$$(2x^2 - a)^2 - (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = 0$$

e può essere espresso come prodotto di due fattori

$$(2x^2 - a + \sqrt{a^2 + b^2})\,(2x^2 - a - \sqrt{a^2 + b^2}) = 0.$$

plichiamo nuovamente il teorema per il quale se il prodotto due elementi di un campo numerico è uguale a zero, deve ere uguale a zero uno dei due elementi.

conseguenza (1) $x^2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

pure (2) $x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

Sappiamo ora che o a o b è diverso da zero, cosicché $\sqrt{a^2 + b^2}$ è un numero positivo. È anche vero che

$$\sqrt{a^2 + b^2} - a \geqslant 0, \quad \text{così che} \quad a - \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant 0$$

dove il segno di uguale vale solo se $b = 0$. Pertanto, l'equazione (1) afferma, in generale, che x è un numero reale il cui quadrato è un numero negativo, e di conseguenza non ha soluzione nell'insieme dei numeri reali. D'altra parte, dall'equazione (2) si trova che x^2 è un numero non negativo, e quindi esistono due numeri reali che soddisfano questa equazione. Le due soluzioni dell'equazione (2) sono le radici quadrate del numero reale positivo $\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$.

Nel caso invece che sia $x = 0$ e $y \neq 0$, un procedimento analogo mostra che esiste una soluzione per y.

Per completare la dimostrazione, è necessario che i valori di x e y soddisfino la relazione $\langle x, y\rangle^2 = \langle a, b\rangle$ o la relazione equivalente (*) di pagina 37.

Poiché $x \in \left\{ \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},\ -\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right\}$

i corrispondenti valori di y sono[1]

$$\left\{ \frac{b}{2\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}},\ \frac{-b}{2\sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}} \right\}.$$

[1] Si noti che abbiamo ordinato gli elementi in questi insiemi così come essi risultano elencati. A rigore, la soluzione dovrebbe avere la forma $\langle x, y\rangle \in \{\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle\}$ che in questo caso risulta un'espressione poco conveniente.

Sostituendo la prima coppia di valori nell'equazione (*) (pag. 37) si trova

$$\langle x^2 - y^2, 2xy\rangle = \left\langle \frac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2} - \frac{b^2}{4\left[\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right]}, \right.$$

$$\left. 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \times \frac{b}{2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{[a+\sqrt{a^2+b^2}]^2 - b^2}{2[a+\sqrt{a^2+b^2}]}, b \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{[a^2 + 2a\sqrt{a^2+b^2} + a^2 + b^2 - b^2]}{2[a+\sqrt{a^2+b^2}]}, b \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{2a^2 + 2a\sqrt{a^2+b^2}}{2[a+\sqrt{a^2+b^2}]}, b \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{2a[a+\sqrt{a^2+b^2}]}{2[a+\sqrt{a^2+b^2}]}, b \right\rangle = \langle a, b\rangle.$$

Ciò mostra che i valori trovati per x e y fanno sì che $\langle x, y\rangle$ sia proprio una radice quadrata di $\langle a, b\rangle$. La verifica per le altre combinazioni di x e di y, e per il caso in cui è $y \neq 0$ è lasciata al lettore.

La precedente dimostrazione conduce al seguente teorema, che mette in evidenza un'importante proprietà che distingue il campo dei numeri complessi dagli altri campi numerici trattati nelle monografie di questa serie.

Teorema: *Ogni numero complesso negativo, nullo o positivo, ha due radici quadrate appartenenti all'insieme dei numeri complessi.*

Si può giungere ad un ulteriore risultato, partendo dal teorema precedente e dal risultato seguente, riportato in tutti i testi di algebra elementare.[1] L'equazione quadratica generale

$$\mathbf{a}\mathbf{z}^2 + \mathbf{b}\mathbf{z} + \mathbf{c} = 0$$

dove **z** è una variabile complessa, e **a, b, c,** sono numeri complessi, ha due soluzioni espresse da

$$\mathbf{z} \in \left\{ \frac{-\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{a}\mathbf{c}}}{2\mathbf{a}}, \frac{-\mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{a}\mathbf{c}}}{2\mathbf{a}} \right\}.$$

Teorema: *Ogni equazione quadratica, nel campo dei numeri complessi, ha come radici due numeri complessi (la cui espressione è data sopra), non necessariamente distinti.*

2. Forma polare e forma trigonometrica di un numero complesso

Un'altra maniera per ricavare la soluzione dell'equazione quadratica del tipo

$$x^2 = a$$

presuppone la conoscenza della trigonometria. Per seguire questo metodo, dobbiamo considerare i numeri complessi da un altro punto di vista. Ciò richiede che per la lunghezza della freccia che rappresenta un numero complesso sia data una definizione formale, che viene giustificata dal teorema di Pitagora.

[1] In tali testi, un teorema molto importante, il teorema fondamentale dell'algebra, è di solito assunto senza dimostrazione (si veda l'introduzione).

Definizione 3.1: *Il valore assoluto o modulo di un numero complesso* $\langle a, b\rangle$, *denotato con* $|\langle a, b\rangle|$ *è il numero reale non negativo* $\sqrt{a^2 + b^2}$.

ESEMPI

(1) $|\langle 3, 4\rangle| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

(2) $|\langle -2, 6\rangle| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

(3) $|5 - 12\mathbf{i}| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$

(4) $|\mathbf{i}| = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$

(5) $|-1 - \mathbf{i}| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

(6) $|-7| = |\langle -7, 0\rangle| = \sqrt{49} = 7$

$|0| = \sqrt{0} = 0; \qquad |3| = \sqrt{9} = 3$

L'ultimo esempio mostra che la definizione precedente è in accordo con la definizione di valore assoluto data usualmente per i numeri reali.

Una conseguenza interessante di questa definizione è che si può scrivere semplicemente

$$|x + y\mathbf{i}| = k, \qquad k > 0$$

per determinare una circonferenza il cui centro coincide con l'origine degli assi cartesiani, e il cui raggio è il numero reale positivo k. (Si veda la Fig. 3–1).

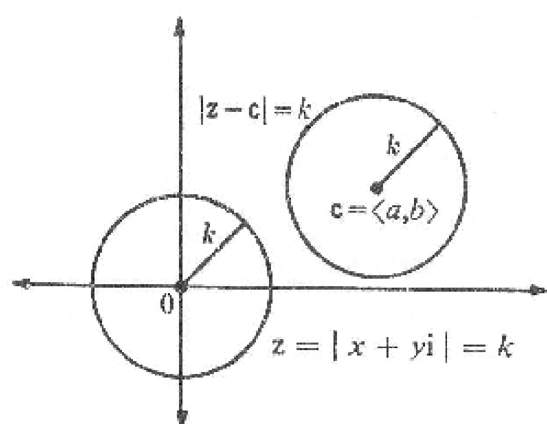


FIG. 3–1

Per una circonferenza di raggio k, il cui centro sia nel punto $\langle a, b\rangle$, si può scrivere semplicemente

$$|x - a + (y - b)\mathbf{i}| = k$$

oppure $$|(x + y\mathbf{i}) - (a + b\mathbf{i})| = k$$

oppure $$|\langle x, y\rangle - \langle a, b\rangle| = k.$$

Quindi, se $\mathbf{z}$ e $\mathbf{c}$ sono numeri complessi, e k è un numero reale e positivo, l'espressione

$$|\mathbf{z} - \mathbf{c}| = k$$

rappresenta una circonferenza con il centro in $\mathbf{c}$ e con raggio uguale a k (Fig. 3–1). Possiamo pensare una circonferenza definita in questo modo come un insieme di punti tracciati dalla punta di una freccia che sia fatta ruotare intorno al suo punto origine $\mathbf{c}$, venendo così a rappresentare un insieme di numeri complessi $\{\mathbf{z}\}$.

Da quanto detto e dalla osservazione delle figure, possiamo identificare un determinato numero complesso mediante il suo valore assoluto e mediante un angolo. In Fig. 3–2 (a), il numero complesso $\langle\sqrt{3}, 1\rangle = \sqrt{3} + \mathbf{i}$, è rappresentato mediante una freccia di cui sono indicate la lunghezza e l'angolo che essa forma con la direzione positiva dell'asse reale.

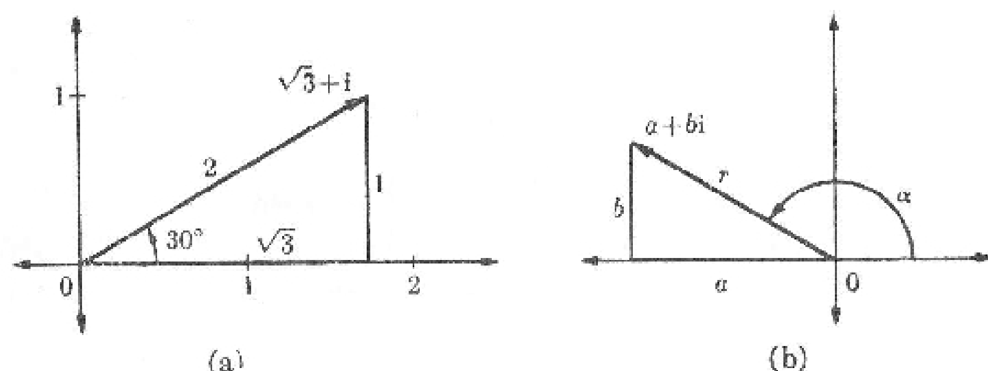


FIG. 3–2

Ora $|\langle\sqrt{3}, 1\rangle| = \sqrt{3+1} = 2$, ed una proprietà dei triangoli rettangoli dice che un angolo il cui lato opposto sta nel rapporto di 1 a 2 con l'ipotenusa, misura 30°. Quindi, la lunghezza 2 e l'angolo di 30° con l'asse reale positivo, identificano il numero complesso $\langle\sqrt{3}, 1\rangle$, cioè $\langle\sqrt{3}, 1\rangle = \langle 2, 30°\rangle$.

In generale, è possibile specificare un numero complesso qualunque fornendo il suo valore assoluto e un angolo α misurato a partire dall'asse reale positivo. (Si confronti la Fig. 3–2 b).

Tutto questo conduce alla seguente uguaglianza

$$\langle a, b\rangle = \langle r, \alpha\rangle$$

dove $r = |\langle a, b\rangle| = \sqrt{a^2 + b^2}$, ed α è un angolo il cui seno è $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e il cui coseno è $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Dalla relazione illustrata in Fig. 3-3, risulta chiaro che

$$\frac{a}{r} = \cos\alpha \quad \text{ossia} \quad a = r\cos\alpha$$

e

$$\frac{b}{r} = \operatorname{sen}\alpha \quad \text{ossia} \quad b = r\operatorname{sen}\alpha\,.$$

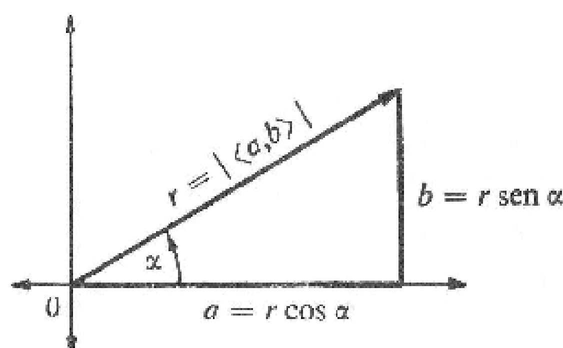


FIG. 3–3

Quindi $$\langle a, b\rangle = \langle r\cos\alpha, r\,\text{sen}\,\alpha\rangle$$
$$= r\langle\cos\alpha, \text{sen}\,\alpha\rangle.$$

In forma normale

$$a + b\mathbf{i} = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha).$$

Definizione 3.2: *Se* $\langle a, b\rangle = \langle r, \alpha\rangle = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha)$, *allora* $\langle r, \alpha\rangle$ *è detta forma polare, mentre* $r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha)$ *è detta forma trigonometrica di* $\langle a, b\rangle$.

È importante ricordare il carattere periodico delle funzioni trigonometriche. In particolare se

$$a = r\cos\alpha \quad \text{e} \quad b = r\,\text{sen}\,\alpha$$

allora

$$a = r\cos(\alpha + 360^{\circ}) \quad \text{e} \quad b = r\,\text{sen}(\alpha + 360^{\circ})$$

$$a = r\cos(\alpha + 2 \times 360^{\circ}) \quad \text{e} \quad b = r\,\text{sen}(\alpha + 2 \times 360^{\circ}).$$

Vale anche

$$a = r\cos(\alpha + (-1)360^{\circ}) \quad \text{e} \quad b = r\,\text{sen}(\alpha + (-1)360^{\circ})$$

e in generale, se k è un qualunque numero intero, negativo, nullo o positivo,

$$\langle a, b\rangle = a + b\mathbf{i} = r[\cos(\alpha + k360^{\circ}) + \mathbf{i}\,\text{sen}(\alpha + k360^{\circ})].$$

Quindi, una lunghezza (valore assoluto) ed un angolo determinano completamente un numero complesso. Viceversa, un numero complesso determina una lunghezza ed un *insieme* di angoli che differiscono fra loro per multipli interi di 360°.

Questo porta alla seguente importante convenzione.

Definizione 3.3: *Due numeri complessi, espressi in forma trigonometrica o polare, sono uguali se e solo se:* (1) *i loro valori assoluti sono uguali e* (2) *se i loro angoli differiscono di un multiplo intero di* 360°.

La definizione dice che (in forma polare)

$$\langle r, \alpha\rangle = \langle s, \beta\rangle \quad \text{se e solo se} \quad r = s \quad \text{e} \quad \alpha = \beta + k360^\circ$$

per qualche intero k, oppure (in forma trigonometrica)

$$r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha) = s(\cos\beta + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\beta)$$

se e solo se $r = s$ e se $\alpha = \beta + k360^\circ$ per qualche intero k. Questa proprietà mostrerà tutta la sua importanza nel prossimo paragrafo.

3. Altre considerazioni sulla moltiplicazione

Poiché $\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle = \langle ac - bd, ad + bd\rangle$ si può dimostrare, ponendo $\langle a, b\rangle = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha)$ e $\langle c, d\rangle = s(\cos\beta + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\beta)$, che

$$\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle = rs\langle \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta, \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\alpha\cos\beta\rangle.$$

Ricordando alcune formule trigonometriche, si può osservare che la relazione precedente diventa

$$\langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle = rs\,\langle \cos(\alpha + \beta), \text{sen}(\alpha + \beta)\rangle$$

che espressa in forma polare diventa

$$(*) \qquad \langle a, b\rangle \otimes \langle c, d\rangle = \langle r, \alpha\rangle \otimes \langle s, \beta\rangle = \langle rs, \alpha + \beta\rangle.$$

Dovrebbe dunque risultare chiaro che questa è una giustificazione diretta del modello intuitivo che ha permesso la formulazione originaria della definizione di moltiplicazione

sull'insieme dei numeri complessi (si veda alle pagine 15-21). Se risulta che

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$$

la moltiplicazione in (*) diventa (in forma polare)

$$\langle a, b\rangle^2 = \langle r, \alpha\rangle^2 = \langle r^2, 2\alpha\rangle$$

o, in forma trigonometrica,

$$\langle a, b\rangle = [r (\cos \alpha + \mathbf{i} \operatorname{sen} \alpha)]^2 = r^2 (\cos 2\alpha + \mathbf{i} \operatorname{sen} 2\alpha).$$

Quale vi sembra la forma più semplice?

Un Teorema di De Moivre:

Per elevare al quadrato un numero complesso espresso in forma polare, si eleva al quadrato il suo valore assoluto e si raddoppia il suo angolo.

Questo teorema è particolarmente conveniente per trovare le radici quadrate dei numeri complessi.

Per esempio, quali sono le radici quadrate di **i**, l'unità immaginaria? Per risolvere questo problema, per prima cosa si esprima **i** in forma trigonometrica.

Come mostra la Fig. 3–4, $|\mathbf{i}| = 1$ e **i** forma un angolo di 90° con l'asse reale positivo. Pertanto si ottiene $\mathbf{i} = 1 (\cos 90^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 90^\circ)$.

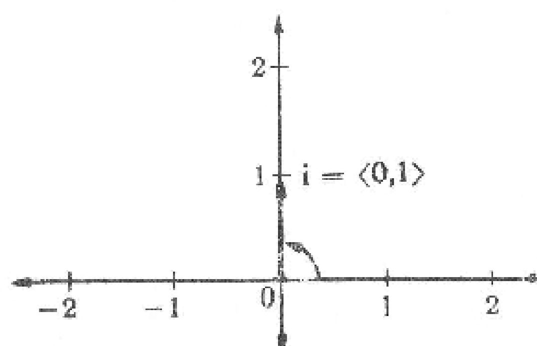


FIG. 3–4

Sappiamo che esiste qualche numero complesso che è radice quadrata di **i**, ed è possibile esprimere tale numero in forma trigonometrica. Possiamo quindi scrivere (assumendo per k un valore intero)

$$\langle r, \alpha \rangle^2 = \langle 1, 90^\circ + k360^\circ \rangle$$

ossia $$\langle r^2, 2\alpha \rangle = \langle 1, 90^\circ + k360^\circ \rangle,$$

donde $$r^2 = 1 \quad \text{e} \quad 2\alpha = 90^\circ + k360^\circ.$$

Poiché r deve essere positivo, si ha di conseguenza

$$r = 1 \quad \text{e} \quad \alpha = 45^\circ + k180^\circ,$$

cosicché $\{\langle 1, 45^\circ + k180^\circ \rangle\}$ è l'insieme delle radici quadrate di **i**.

Se $k = 0$, $\alpha = 45^\circ$ cosicché $\langle 1, 45^\circ \rangle$ è una radice quadrata di **i**.

Se $k = 1$, $\alpha = 45^\circ + 180^\circ$ cosicché $\langle 1, 225^\circ \rangle$ è una radice quadrata di **i**.

Se $k = 2$, $\alpha = 45^\circ + 360^\circ$ cosicché $\langle 1, 405^\circ \rangle$ è una radice quadrata di **i**.

Se $k = 3$, $\alpha = 45^\circ + 450^\circ$ cosicché $\langle 1, 495^\circ \rangle$ è una radice quadrata di **i**.

Se $k = 4$, $\alpha = 45^\circ + 720^\circ$ cosicché $\langle 1, 765^\circ \rangle$ è una radice quadrata di **i**.

E così, per altri valori di k, si ottengono apparentemente altre radici quadrate di **i**. Notiamo che $405^\circ - 45^\circ = 360^\circ$, che $585^\circ - 225^\circ = 360^\circ$ e che $765^\circ - 45^\circ = 2 \times 360^\circ$. Per-

tanto, quando $k \in \{0, 1\}$, $k \in \{1, 2\}$, $k \in \{2, 3\}$, $k \in \{3, 4\}$ o quando k assume due qualsiasi valori *interi consecutivi*, si ottengono radici quadrate di **i** diverse fra loro.

Per ribadire questo concetto, scriviamo ciascuna radice quadrata di **i** sopra elencata in forma normale. Avremo:

$$\langle 1, 45^\circ \rangle = 1 (\cos 45^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1, 225^\circ \rangle = 1 (\cos 225^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 225^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1, 405^\circ \rangle = 1 (\cos 405^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 405^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1, 495^\circ \rangle = 1 (\cos 495^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 495^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1, 765^\circ \rangle = 1 (\cos 765^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 765^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Questo dimostra che si trovano esattamente *due* radici quadrate di **i**. Notiamo inoltre che

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathbf{i} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Pertanto, ciascuna radice quadrata è l'opposto dell'altra. Il lettore si aspettava questo risultato?

Quanto segue è una verifica del fatto che $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathbf{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ è una radice quadrata di **i**.

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \otimes \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2, \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 \right\rangle =$$

$$= \langle 0, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \rangle$$

$$= \langle 0, 1 \rangle$$

$$= \mathbf{i}$$

Si può verificare in modo analogo che $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$ è una radice quadrata di **i**. Tuttavia, questa verifica non è essenziale per risolvere il problema, poiché il teorema del paragrafo I, pag. 41, ci dice che esistono due radici quadrate per ogni numero complesso, e la soluzione precedente porta esattamente a due radici possibili.

4. Radici cubiche e radici di ordine superiore

Con una semplice estensione del metodo sviluppato nel paragrafo precedente, possiamo trovare le radici cubiche (soluzioni di $\mathbf{z}^3 = \mathbf{a}$), le radici quarte (soluzioni di $\mathbf{z}^4 = \mathbf{a}$), e in generale le radici di ogni ordine (soluzioni di $\mathbf{z}^n = \mathbf{a}$), di un numero complesso **a**. Per esempio risolviamo l'equazione $\mathbf{z}^3 = -8$. Il teorema di De Moivre, espresso in forma polare dalla relazione

$$\langle r, d \rangle^n = \langle r^n, nd \rangle$$

(sul quale è basato il nostro metodo di risoluzione) è dimostrato nell'ultimo capitolo di questa monografia.

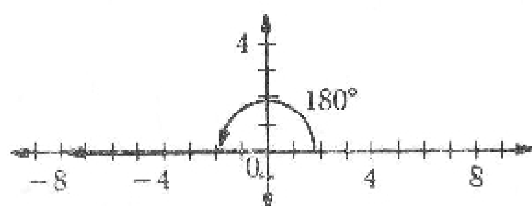


FIG. 3–5

Per prima cosa esprimiamo —8 = ⟨—8, 0⟩ in forma polare, e uguagliamolo a $\langle r, \alpha\rangle^3$. Pertanto

$$\langle r, \alpha\rangle^3 = \langle 8, 180^\circ + k360^\circ\rangle.$$

Allora $$\langle r^3, 3\alpha\rangle = \langle 8, 180^\circ + k360^\circ\rangle$$

ossia $$r^3 = 8 \qquad \text{e} \qquad 3\alpha = 180^\circ + k360^\circ.$$

Poiché r deve essere positivo, questo comporta

$$r = 2 \qquad \text{e} \qquad \alpha = 60^\circ + k120^\circ.$$

Se $k = 0$, $\alpha = 60^\circ$, e una radice cubica è $\langle 2, 60^\circ\rangle$.

Se $k = 1$, $\alpha = 60^\circ + 120^\circ$, e una radice cubica è $\langle 2, 180^\circ\rangle$.

Se $k = 2$, $\alpha = 60^\circ + 240^\circ$, e una radice cubica è $\langle 2, 300^\circ\rangle$.

Se $k = 3$, $\alpha = 60^\circ + 360^\circ$, e vediamo che $\langle 2, 420^\circ\rangle = \langle 2, 60^\circ\rangle$ poiché $420^\circ - 60^\circ = 1 \times 360^\circ$.

Si vede cioè che per le radici cubiche si debbono scegliere *tre valori consecutivi di k*. Quanti valori dovremo scegliere per le radici quarte? Quanti per le radici quinte? E quanti per le radici n-esime?

Ritorniamo al nostro problema.

Possiamo ora esprimere queste radici in forma normale. Cioè

$$\langle 2, 60^\circ\rangle = 2(\cos 60^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 60^\circ) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right) - 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$$

$$\langle 2, 180^\circ\rangle = 2(\cos 180^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 180^\circ) =$$

$$= 2(-1 + 0\mathrm{i}) = -2$$

$$\langle 2, 300^\circ\rangle = 2(\cos 300^\circ + \mathbf{i} \operatorname{sen} 300^\circ) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right) = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}.$$

Confrontiamo questa soluzione con la seguente che è una naturale conseguenza della soluzione introdotta nel paragrafo 1.

Supponiamo che $\langle x, y\rangle$ sia una radice cubica di —8. Allora

$$\langle x, y\rangle^3 = \langle -8, 0\rangle$$

ossia $$\langle x, y\rangle \otimes \langle x, y\rangle^2 = \langle -8, 0\rangle$$

ossia $$\langle x, y\rangle \otimes \langle x^2 - y^2, 2xy\rangle = \langle -8, 0\rangle$$

ossia $$\langle x^3 - xy^2 - 2xy^2, x^2y - y^3 + 2x^2y\rangle = \langle -8, 0\rangle$$

ossia (1) $x^3 - 3xy^2 = -8$ e (2) $3x^2y - y^3 = 0$.

Dall'equazione (2): $y(3x^2 - y^2) = 0$

Pertanto $y = 0$ oppure $y^2 = 3x^2$

Sostituendo i valori trovati in (1):

Se $y = 0$ $x^3 = -8$, e $x = -2$

cosicché $\langle -2, 0\rangle = -2$ è una radice cubica di —8.

Se $\qquad y^2 = 3x^2, \qquad x^3 - 3x\,(3x^2) = -8$

$$x^3 - 9x^3 = -8$$

$$-8x^3 = -8$$

ossia $\qquad x^3 = 1$

ossia $\qquad x = 1.$

Allora poiché $y^2 = 3x^2$, si trova

$$y^2 = 3$$

ossia $\qquad y \in \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}.$

Perciò $\qquad \langle 1, \sqrt{3} \rangle = 1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$

e $\qquad \langle 1, -\sqrt{3} \rangle = 1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$

sono altre radici cubiche di -8. Di conseguenza, le radici cubiche di -8 sono i numeri complessi -2, $1 + \mathbf{i}\sqrt{3}$, e $1 - \mathbf{i}\sqrt{3}$. Notiamo quindi che il metodo che comporta l'uso della forma polare e della forma trigonometrica è in grado di fornire una soluzione dell'equazione

$$\mathbf{z}^3 = a$$

con un numero minore di passaggi algebrici di quanto non richieda il metodo esposto nel paragrafo 1.

IV. Varie

1. Geometria e numeri complessi

Nei precedenti paragrafi ci siamo frequentemente serviti della rappresentazione di coppie ordinate come punti o come frecce allo scopo di definire e di visualizzare le operazioni con i numeri complessi. Non deve quindi destare sorpresa constatare che un approccio analitico alla geometria piana si serve delle stesse coppie ordinate di numeri reali, con le quali abbiamo costruito il sistema dei numeri complessi. In questo paragrafo suggeriamo brevemente come costruire un insieme di *punti*, come definire delle *rette*, servendosi di questi punti, e come usare le operazioni definite fra questi punti per sviluppare le proprietà fondamentali della geometria. Come per i numeri complessi, useremo sia i punti che le frecce per rappresentare i punti, a seconda della nostra convenienza.

Per prima cosa *definiamo* un *vettore* come una coppia or-

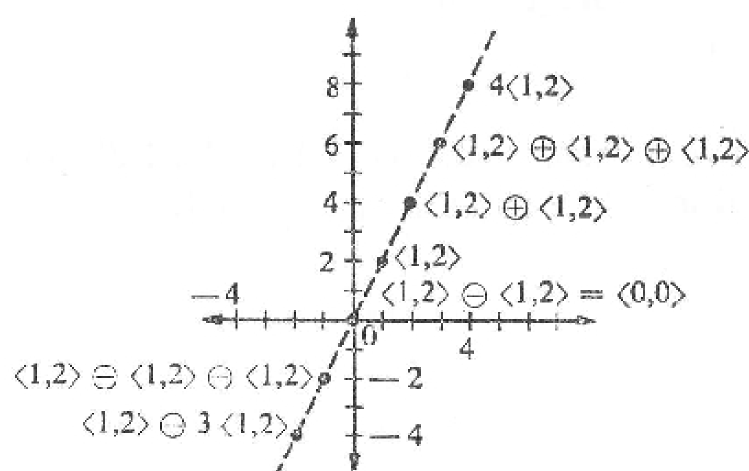


FIG. 4–1

dinata di numeri reali, ed assumiamo le definizioni di uguaglianza e di addizione di numeri complessi come definizioni per l'uguaglianza e per l'addizione di vettori. Adottiamo, inoltre, la definizione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare. Come per i numeri complessi, l'esame di un grafico può risultare oltremodo vantaggioso e stimolante.

La Fig. 4–1 visualizza i seguenti vettori: $\langle 1, 2\rangle$; $\langle 1, 2\rangle \oplus \langle 1, 2\rangle$; $\langle 1, 2\rangle \oplus \langle 1, 2\rangle \oplus \langle 1, 2\rangle$; $4\langle 1, 2\rangle$; $\langle 1, 2\rangle \ominus \langle 1, 2\rangle$; $\langle 1, 2\rangle \ominus \langle 1, 2\rangle \ominus \langle 1, 2\rangle$; $\langle 1, 2\rangle \ominus 3\langle 1, 2\rangle$, rappresentati sul grafico per mezzo di punti.

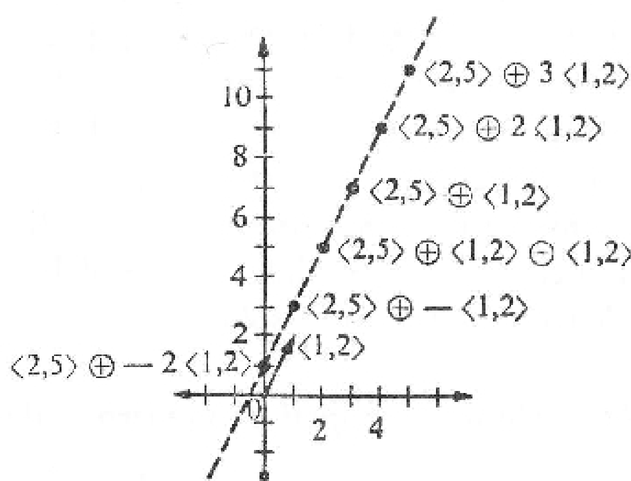


FIG. 4–2

La Fig. 4–2 visualizza i vettori dell'insieme $\{\langle 2, 5\rangle \oplus \mathbf{v}\}$, dove $\mathbf{v}$ è uno qualsiasi dei vettori rappresentati da *punti* in Fig. 4–1. Anche il vettore $\langle 1, 2\rangle$ è rappresentato, da una *freccia*, in Fig. 4–2. Notiamo che, in ciascun caso, come è indicato dalla linea tratteggiata, tutti i punti giacciono su una retta. Questo fatto suggerisce che è possibile definire un punto come vettore, e che è pure possibile definire le rette come insiemi di punti (vettori). Dalla Fig. 4–1 possiamo essere portati a definire una retta come l'insieme $\{r\langle a, b\rangle\}$, dove lo scalare r può essere sostituito da qualsiasi numero reale, e dove $\langle a, b\rangle$ è un vettore

ben definito. D'altra parte, la Fig. 4–2 suggerisce che, più in generale, è possibile definire una retta come l'insieme $\{\langle p, q\rangle \oplus \oplus r\langle a, b\rangle\}$, dove $\langle p, q\rangle$ e $\langle a, b\rangle$ sono vettori ben definiti, ed r è uno scalare che può essere sostituito da qualsivoglia valore reale. Questa retta è chiamata *retta passante per* $\langle p, q\rangle$ *con direzione coincidente con la direzione del vettore* $\langle a, b\rangle$. Perciò $\{\langle 2, 5\rangle \oplus r\langle 1, 2\rangle\}$, è una retta passante per $\langle 2, 5\rangle$, con direzione coincidente con la direzione di $\langle 1, 2\rangle$.

Facciamo notare che la retta $\{\langle 1, 2\rangle \oplus r\langle 1, 2\rangle\}$ risulta parallela alla retta $\{\langle 2, 5\rangle \oplus r\langle 1, 2\rangle\}$. Questo fatto ci indica che si può affermare che due rette sono parallele se hanno lo *stesso* vettore-direzione. D'altra parte, poiché $\langle 2, 4\rangle = = 2\langle 1, 2\rangle$, e poiché la freccia che rappresenta $\langle 2, 4\rangle$ è in grado di «coprire» la freccia che rappresenta $\langle 1, 2\rangle$, è possibile una definizione più generale. In particolare, due rette si dicono *parallele* se e solo se il vettore direzione $\langle a, b\rangle$ di una di esse può essere espresso come multiplo scalare del vettore direzione $\langle c, d\rangle$ dell'altra; cioè, se e solo se

$$\langle a, b\rangle = t\langle c, d\rangle \quad \text{per } \textit{qualche} \text{ numero reale } t.$$

Si richiede che nessuna linea abbia la direzione del vettore $\langle 0, 0\rangle$. Riesce il lettore a suggerire una ragione per questa restrizione? [1]

Come è possibile definire la perpendicolarità delle linee usando i vettori come punti? Ritorniamo ancora ai numeri complessi, parenti stretti dei nostri vettori, e serviamocene come guida. L'interpretazione grafica data per la moltipli-

---

[1] Poiché $\langle 0, 0\rangle = 0\langle a, b\rangle$, indipendentemente dai numeri reali a e b, una retta con vettore direzione $\langle 0, 0\rangle$ risulterebbe parallela a ogni retta. Quanti punti conterrebbe? *Esattamente uno!* Si preferisce quindi eliminare $\langle 0, 0\rangle$ come possibile vettore-direzione di una retta, piuttosto che dover affrontare una simile complicazione. Fortunatamente, con questa presa di posizione non si «perde» alcuna retta del piano.

cazione di un numero complesso per l'unità immaginaria $\langle 0, 1\rangle$ suggerisce le seguenti considerazioni: due rette sono perpendicolari se e solo se il vettore-direzione $\langle a, b\rangle$ di una di esse è il prodotto dell'altro per $\langle 0, 1\rangle$. Questo fatto implica, per esempio, che poiché $\langle 1, 2\rangle \otimes \langle 0, 1\rangle = \langle -2, 1\rangle$, le rette $\mathscr{L} = \{\langle -1, 1\rangle \oplus r\langle 1, 2\rangle\}$ e $\mathscr{M} = \{\langle 3, 3\rangle \oplus t\langle -2, 1\rangle\}$ sono perpendicolari. (Si veda la Fig. 4–3).

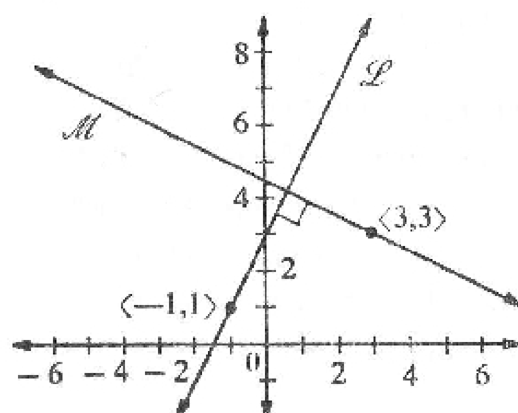


FIG. 4–3

Va tuttavia ricordato che la moltiplicazione di un numero complesso per *qualsiasi* numero immaginario puro provoca una rotazione di 90°, cosicché in generale potremmo dire che due rette sono perpendicolari se e solo se il vettore-direzione $\langle a, b\rangle$ di una delle rette è il prodotto del vettore $\langle c, d\rangle$ direzione dell'altra per $\langle 0, k\rangle$, dove k è un qualsiasi numero reale; cioè

$$\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \otimes \langle 0, k\rangle .$$

Ma questo significa che

$$\frac{\langle a, b\rangle}{\langle c, d\rangle} = \langle 0, k\rangle .$$

Applicando la definizione di divisione su $\mathbf{C}$ (si veda a pagina 29), si può scrivere:

$$\frac{\langle a, b\rangle}{\langle c, d\rangle} = \langle a, b\rangle \times \left\langle \frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{c^2 + d^2} \langle ac + bd, -ad + bc\rangle .$$

Ora, se questo deve essere uguale a $\langle 0, k\rangle$, allora si richiede che sia $ac + bd = 0$. Si noti che questo fatto ci permette di asserire che: due rette sono *perpendicolari* se e solo se i loro vettori-direzione $\langle a, b\rangle$ e $\langle c, d\rangle$ sono tali che sia $ac + bd = 0$. L'espressione $ac + bd$ è estremamente utile nella geometria vettoriale, ed essa ha un nome particolare: *prodotto scalare.* Pertanto, definiamo l'operazione *prodotto scalare* per i vettori, nel modo seguente

$$\langle a, b\rangle \odot \langle c, d\rangle = ac + bd .$$

Sinonimi di prodotto scalare sono *prodotto interno* e *prodotto puntuale.* Facciamo notare che il prodotto scalare di due vettori è uno *scalare*, non un altro vettore.

La condizione più spesso usata come definizione di perpendicolarità di due rette, in una geometria vettoriale, consiste nel richiedere che il prodotto scalare dei vettori direzione delle due rette sia *nullo* (cioè uguale a zero).

È utile aggiungere la seguente considerazione: in un insieme di vettori è possibile definire direttamente il prodotto scalare. In effetti, solo di raro si definisce su un insieme di vettori una operazione corrispondente alla moltiplicazione di numeri complessi. L'uso, da noi fatto, dell'analisi della moltiplicazione di un numero complesso per un numero immaginario puro, è stato dettato dalla convenienza, non da una necessità.

Non è nostra intenzione fare una discussione completa della

geometria vettoriale; ci basta aver mostrato che il parallelismo e la perpendicolarità possono facilmente essere definiti servendosi dei vettori, e che le operazioni con i vettori possono essere messe in stretta relazione con le operazioni sui numeri complessi.

2. Induzione matematica e teorema di De Moivre

Nel volumetto *I numeri naturali* è stato enunciato il principio di induzione matematica come uno dei postulati di Peano, caratterizzanti l'insieme dei numeri naturali. Una forma diversa di tale principio è la seguente:

Principio di induzione matematica

Se S è un sottoinsieme dell'insieme **N** *dei numeri naturali tale che*

(i) *1 appartiene ad S, e*

(ii) *se s appartiene ad S, anche $s+1$ appartiene ad S.*

Allora $S = \mathbf{N}$.

Questo principio (per quanto questo fatto non sia stato sottolineato) è stato considerato per ciascun insieme, **W** (numeri naturali con zero), **I** (numeri interi), **F** (numeri razionali), **R** (numeri reali), e **C** (numeri complessi), man mano che essi venivano costruiti. In particolare, l'induzione matematica rimane vera per quei numeri complessi che corrispondono ai numeri naturali. È possibile determinare questo insieme, considerando tutte le corrispondenze biunivoche $\langle a, 0\rangle \leftrightarrow a$, che sono state considerate in ogni stadio delle nostre costruzioni. Queste sono le stesse corrispondenze che ci hanno suggerito come definire le operazioni fondamentali su ogni sistema numerico discusso.

Il sottoinsieme di **C**

$$\mathcal{N} = \{\langle 1, 0\rangle, \langle 2, 0\rangle, \langle 3, 0\rangle, \ldots, \langle n, 0\rangle, \ldots\}$$
$$= \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$$

è un insieme di numeri naturali nel campo complesso, al quale si applica la proprietà. Di conseguenza, è possibile dimostrare teoremi, relativi a questi numeri naturali nel campo complesso, servendosi di deduzioni imperniate sull'induzione matematica. Per esempio dimostriamo un teorema di De Moivre.

Sia $\langle a, b\rangle$ un numero complesso, la cui forma polare è $\langle r, \alpha\rangle$, cioè, $a + b\mathbf{i} = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)$. Vogliamo dimostrare che

$$[r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,n\alpha).$$

Per provare questa relazione per mezzo dell'induzione dobbiamo stabilire (*i*) che l'insieme S, per il quale la relazione è vera, contiene il numero naturale 1. Ma questo passo, in questo caso (e in molti altri) è del tutto banale in quanto si richiede soltanto la definizione [1] che $r^1 = r$, e la proprietà dell'identità moltiplicativa, per la quale $1(\alpha) = \alpha$. Pertanto

$$[r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^1 = r^1(\cos 1\cdot\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,1\cdot\alpha)$$

come richiesto. Perciò, 1 appartiene ad S $(1 \in S)$. Dobbiamo ora mostrare (*ii*) che l'ipotesi che il numero naturale s appartiene ad S $(s \in S)$, porta alla conclusione che anche $(s + 1)$ appartiene ad S $([s + 1] \in S)$.

In altre parole, poniamo (ipotesi induttiva)

$$[r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^s = r^s(\cos s\alpha + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,s\alpha)$$

---

[1] La definizione ricorsiva della potenza dei numeri naturali cui qui alludiamo è: $b^1 = b$, e per $n > 1$, $b^n = b \,.\, b^{n-1}$. Altre definizioni ricorsive sono discusse nel già ricordato volumetto *I numeri naturali*.

e dobbiamo dimostrare che

$$[r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha)]^{s+1} = r^{s+1}[\cos(s+1)\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,(s+1)\alpha].$$

Consideriamo le seguenti espressioni:
Per definizione di potenza

$$[r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha)]^{s+1} = r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha)[r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha)]^{s};$$

per l'ipotesi induttiva

$$= r(\cos\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,\alpha)\, r^{s}(\cos s\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,s\alpha);$$

per proprietà della moltiplicazione

$$= r^{1+s}[\cos\alpha\cos s\alpha + \mathbf{i}^2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,s\alpha + \mathbf{i}(\text{sen}\,\alpha\cos s\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\,s\alpha)];$$

poiché $\mathbf{i}^2 = -1$

$$= r^{1+s}[\cos\alpha\cos s\alpha - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,s\alpha + \mathbf{i}(\text{sen}\,\alpha\cos s\alpha + \cos\alpha\,\text{sen}\,s\alpha)];$$

per le formule di addizione della trigonometria

$$= r^{1+s}[\cos(\alpha + s\alpha) + \mathbf{i}\,\text{sen}\,(\alpha + s\alpha)];$$

per la proprietà distributiva

$$= r^{1+s}[\cos(1+s)\alpha + \mathbf{i}\,\text{sen}\,(1+s)\alpha].$$

Poiché $1 + s = s + 1$, abbiamo dimostrato che la parte (*ii*), del principio di induzione matematica, risulta soddisfatta. L'applicazione di questo principio completa la dimostrazione di questo teorema.

È importante far notare che i numeri r ed α durante tutto lo svolgimento della dimostrazione sono mantenuti costanti. L'induzione agisce solamente sulla variabile s. Tuttavia, r ed α per quanto non siano « variabili » nel processo di induzione, possono, nonostante ciò, essere sostituiti da *qualsiasi* numero reale. Per questa ragione il teorema è valido per qualsiasi numero complesso $\langle r, \alpha \rangle$, come pure è valido per qualsiasi numero naturale nel campo complesso. Abbiamo così un esempio della « potenza dimostrativa » del principio di induzione matematica.

Intuito dal matematico francese Blaise Pascal nel 1665, usato da Richard Dedekind (famoso matematico del secolo scorso), ed adottato da Giuseppe Peano come postulato fondamentale, questo principio trova le sue applicazioni in molti campi della scienza matematica.

3. Fine ed inizio

Così terminiamo con un ritorno al punto di partenza. Abbiamo tracciato i sistemi numerici, costruendoli passo passo dai numeri naturali ai numeri complessi. Tuttavia questo svolgimento ha a mala pena graffiato la superficie della scienza matematica. Si è così voluto mostrare alle persone interessate il mondo della matematica, mondo i cui continenti nascondono ancora inesplorate meraviglie.

Quei continenti, per i quali esistono « mappe di orientamento », comprendono: lo studio della geometria bi- tri- ed n-dimensionale, per mezzo di vettori; lo studio dei codici, usati per la trasmissione dei segreti di stato o industriali, per mezzo dell'analisi matriciale; l'analisi delle incertezze con i metodi della probabilità e di deduzione statistica; l'algebra degli insiemi finiti e infiniti, di classi di congruenza di interi, e di una molteplicità di sistemi quali, ad esempio, gruppi, anelli, domini d'integrità ecc.

Fra i « sentieri », sui quali il lettore può incamminarsi nei suoi futuri studi, vogliamo ricordargli le monografie della serie *Parlando di Matematica*, i testi liceali e universitari, e altri testi ancora, alcuni dei quali non ancora scritti.

Per il nostro lettore, il veicolo e il carburante devono essere il suo desiderio e la sua energia; spetta a lui porsi un limite, per eventualmente superarlo.

FINITO DI STAMPARE
MARZO 1967
NELLO STABILIMENTO GRAFICO
MATARELLI S.p.A. - MILANO

ARGOMENTI DI MATEMATICA

Un'interessante serie di volumi dedicati a concetti e metodi fondamentali della matematica classica e moderna.

B. A. Trakhtenbrot: Algoritmi e macchine calcolatrici automatiche

V. G. Shervatov: Funzioni iperboliche

A. I. Markushevich: Aree e logaritmi

V. G. Boltyanskii: Figure equivalenti ed equidecomponibili

I. P. Natanson: Somme di grandezze infinitamente piccole

E. S. Venttsel': Introduzione alla teoria dei giochi

I. S. Sominskii: Il metodo di induzione matematica

L. I. Golovina e I. M. Yaglom: L'induzione in geometria

G. E. Shilov: Come costruire i grafici

I. P. Natanson: Problemi elementari di massimo e minimo

N. N. Vorobyov: I numeri di Fibonacci

A. I. Fetisov: La dimostrazione in geometri

Ya. S. Dubnov: Errori nelle dimostrazioni

B. I. Argunov e L. A. Skornyakov: Teoremi configurazionali

A. M. Lopshits: Calcolo delle aree di figure

A. S. Barsov: Cos'è la programmazione

Volumetti tascabili 12 × 18,5, in brossura, da L. 80

(5) L. 900.-